

PIETRO REGOLIOSI

SERGIO STORONI RIDOLFI

INTRODUZIONE
ALLA
GEOTECNICA

i modelli costitutivi dei terreni

INDICE

Premessa	pag.	5
Introduzione	»	7
Capitolo 1 – Concetti generali		
1.1. Proprietà generali delle terre	»	13
1.2. Le tensioni nel terreno ed il concetto di tensione efficace	»	14
1.3. La tensione geostatica	»	16
1.4. Variazioni delle tensioni a causa della filtrazione dell'acqua	»	18
Capitolo 2 – Lo sforzo		
2.1. Definizione	»	23
2.2. Analisi dello sforzo	»	25
2.3. Tensione su una superficie comunque inclinata	»	28
2.4. Trasformazione dello sforzo da un sistema di riferimento ad un altro	»	32
2.5. Equazioni di equilibrio.....	»	34
2.6. Simmetria della matrice degli sforzi	»	36
2.7. Sforzi principali	»	37
2.8. Scomposizione del tensore degli sforzi	»	40
2.9. Ortogonalità dei piani principali	»	42
2.10. Sforzi ottaedrici	»	43
Capitolo 3 – Le deformazioni		
3.1. Definizioni generali	»	57
3.2. Analisi delle deformazioni.....	»	58
3.3. Interpretazione geometrica delle deformazioni	»	63
3.3.1. Deformazione per taglio semplice e per taglio puro	»	65
3.4. Deformazioni principali.....	»	66
3.5. Scomposizione del tensore delle deformazioni	»	67
3.6. Deformazioni ottaedriche.....	»	69
3.7. Sforzi e deformazioni piane.....	»	69
Capitolo 4 – Cerchi di Mohr		
4.1. Derivazione analitica	»	73
4.2. Costruzione grafica	»	78
Capitolo 5 – Elasticità		
5.1. Relazioni sforzo-deformazione lineari.....	»	93
5.2. Materiali elastici.....	»	104
5.3. Modelli elastici.....	»	105
5.3.1. Modelli elastici di Cauchy.....	»	106

5.3.2. Modello elastico di Cauchy al 1° ordine	»	107
5.3.3. Modello elastico di Cauchy del 2° ordine	»	113
5.3.4. Modelli di Cauchy di ordine superiore	»	117

Capitolo 6 – La Plasticità

6.1. Riferimenti storici	»	119
6.2. Caratteri generali	»	119
6.3. Criterio di snervamento	»	121
6.4. La plasticità nei metalli	»	124
6.4.1. Criterio di snervamento di Tresca	»	129
6.4.2. Criterio di snervamento di von Mises	»	131
6.4.3. Confronto fra i due criteri di rottura	»	133
6.4.4. Approssimazioni della teoria dei metalli	»	134
6.5. Criterio di rottura di Mohr-Coulomb	»	134
6.6. Modello di Drucker-Prager	»	137
6.7. Deformazioni plastiche	»	139
6.8. Relazioni sforzo-deformazioni plastiche	»	142
6.8.1. Relazioni di Levy-Mises	»	142
6.8.2. Equazioni di Prandtl-Reuss	»	143
6.8.3. Lavoro plastico	»	145
6.8.4. Comportamento di flusso plastico	»	146
6.8.5. Postulati di stabilità di Drucker	»	149
6.8.6. Condizioni di Prager	»	151
6.9. Derivazione della relazione sforzo-deformazione plastica	»	153
6.9.1. Relazione sforzo-deformazione per un materiale plastico ideale	»	156

Capitolo 7 – La teoria dello stato critico

7.1. Prove sperimentali	»	171
7.2. Analisi della deformazione plastica per i terreni	»	176
7.2.1. Premessa	»	176
7.2.2. Terreni normalconsolidati (NC).....	»	180
7.2.3. Rappresentazione bidimensionale e tridimensionale per i terreni NC ..	»	186
7.2.4. Terreni sovraconsolidati (OC)	»	190
7.2.5. Rappresentazione bidimensionale e tridimensionale per i terreni OC ..	»	194
7.2.6. Terreni leggermente sovraconsolidati	»	196
7.2.7. Confronto fra il comportamento dei terreni NC ed OC	»	197
7.2.8. Superficie di stato limite	»	198
7.3. Comportamento delle sabbie	»	200
7.4. Dilatanza	»	204
7.5. Lo stato critico	»	208
7.6. Resistenza al taglio	»	210
7.6.1. Interpretazioni dei valori di resistenza al taglio	»	214

Capitolo 8 – Il modello di Cam Clay

8.1. Premessa.....	»	235
8.2. Derivazione analitica generale dell'equazione dei domini di snervamento	»	235
8.3. Derivazione dell'equazione della superficie limite	»	238
8.4. Espressione del rapporto γ : i modelli di incrudimento	»	239
8.5. Derivazione specifica delle equazioni del modello	»	241
8.6. Espressione delle deformazioni elasto-plastiche secondo i modelli Cam Clay	»	244

Capitolo 9 – Applicazioni dei modelli al comportamento reale dei terreni

9.1. Introduzione	»	249
9.2. Comportamento elastico dei terreni.....	»	250
9.2.1. Calcolo delle deformazioni elastiche	»	252
9.3. Comportamento plastico dei terreni.....	»	254
9.3.1. Calcolo delle deformazioni plastiche e totali	»	261
9.4. Il modello Cam Clay per i percorsi drenati	»	262
9.5. Il modello Cam Clay per i percorsi non drenati	»	266
9.6. Lo stato critico	»	270
APPENDICE	»	287

Premessa

In generale la meccanica è la disciplina che studia le forze e gli spostamenti (o le tensioni e le relative deformazioni). Esistono diversi settori della meccanica che si differenziano fra loro a seconda del particolare materiale che prendono in considerazione, ma tutti utilizzano i principi generali di equilibrio e congruenza. Le forze ed i momenti applicati ad un corpo che non sia soggetto ad alcuna accelerazione devono essere in equilibrio (prima legge di Newton); per ogni corpo che si deformi o si sposti nello spazio le deformazioni devono essere congruenti e gli spostamenti compatibili; in altre parole: la materia non si sovrappone e non svanisce.

La geotecnica (o meccanica delle terre) si occupa del comportamento dei terreni e delle strutture interagenti con essi. A sua volta la conoscenza delle proprietà dei terreni deve essere necessariamente basata su un modello matematico che, ancorché semplificato, è piuttosto complesso ed è costituito da vari livelli di astrazione.

Questo testo si prefigge di illustrare tali complicati concetti in maniera semplice e, si spera, efficace, senza per questo voler rinunciare al rigore della trattazione.

Esistono certamente nel panorama letterario italiano ottimi libri di geotecnica, ma manca, a modesto parere degli scriventi, un testo completamente dedicato ai modelli costitutivi dei terreni che proponga al lettore in modo semplice gli argomenti elementari della materia, con lo scopo di fornire un primo strumento per le proprie conoscenze ed i concetti indispensabili per una corretta impostazione di una qualsiasi progettazione geotecnica.

Il modello generale che viene illustrato fa riferimento alla teoria dello stato critico, considerata ormai una trattazione unificata per comprendere gli effetti di variazione di volume e distorsionali dei terreni e rappresenta quindi uno schema concettuale di riferimento semplice e logico per inquadrare in una visione unitaria la risposta di “materiali” apparentemente diversi fra di loro. Nel libro pertanto non ci si attarda nell’approfondimento di procedure analitiche sofisticate o nel presentare modelli avanzati, volendo semplicemente illustrare una visione unitaria del comportamento dei terreni alla luce dei principi dello stato critico, intesi come generalizzazione di una vasta gamma di evidenze sperimentali.

In linea generale il testo è organizzato in modo da fornire al lettore un quadro completo della materia cercando di eliminare quanto più possibile la necessità di riferirsi a letture propedeutiche sull’argomento. Questo è lo scopo dei primi capitoli dedicati ad illustrare i concetti generali di sforzo e deformazione ed i principi dell’elasticità e della plasticità. Le appen-

dici alla fine del volume a loro volta richiamano aspetti teorici che riguardano argomenti di base di altre discipline.

Tenendo poi presente che, benché abbia un'indubbia veste teorica, lo scopo ultimo della presente pubblicazione è molto pratico, ogni capitolo è stato corredato da una serie di esempi svolti, indispensabili per fare acquisire al lettore maggiore padronanza sull'argomento.

Per quanto precedentemente esposto, questo libro risulta dunque destinato principalmente agli studenti di ingegneria e scienze geologiche, ma è utile anche ai professionisti che a vario titolo si interessano della materia, e vogliono acquisire in modo semplice una preparazione di base nella meccanica dei terreni. Come già ribadito infatti l'auspicio è quello di fornire al lettore un modello del terreno per la scelta dei parametri da introdurre nelle analisi geotecniche, sapendo quanto siano pericolose le formule se non inquadrare in un solido contesto teorico.

Introduzione

In geotecnica, il terreno reale – non omogeneo, discontinuo e con una struttura interna sensibile al trascorrere del tempo – viene rappresentato da un mezzo ideale deformabile continuo. Un mezzo siffatto si chiama semplicemente “mezzo” (*medium*), mentre si usa il termine “corpo” (*body*) per indicare una porzione di spazio, non necessariamente con contorni definiti, occupata dal mezzo continuo.

Il concetto di continuità implica innanzitutto che i mezzi analizzati conservano nei loro elementi infinitesimi le proprietà osservate nell’insieme, e pertanto lo studio può esser condotto a livello fenomenologico anziché a livello strutturale, atomico o subatomico.

In realtà il suolo è un sistema particellare e le tensioni si concentrano nei punti di contatto dei granuli, raggiungendo valori molto elevati. Normalmente però viene valutata un’area totale (comprensiva dei solidi e dei vuoti) e non già solo un’area della parte solida. Questa assunzione può essere ragionevole considerando il fatto che le dimensioni dei problemi da trattare (fondazioni, paratie, ecc.) sono molto grandi comparate con le dimensioni delle singole particelle.

Si assume poi che il suolo sia omogeneo, cioè che le principali proprietà siano uguali su un’area molto vasta, anche se in realtà le caratteristiche del materiale reale variano da punto a punto. Infine si suppone che il materiale sia isotropo, cioè che le sue caratteristiche siano uguali in tutte le direzioni.

Si perviene pertanto alla descrizione di un particolare comportamento idealizzato di un materiale reale se, mediante un’equazione costitutiva, si stabilisce un’opportuna relazione fra forze applicate e deformazioni indotte.

La definizione delle opportune equazioni costitutive è chiaramente suggerita dal comportamento dei materiali reali, così come risulta da osservazioni empiriche, cioè da prove sperimentali in laboratorio. La scelta di una determinata equazione costitutiva (cioè in altre parole di una determinata relazione fra sforzi e deformazioni) consente dunque di utilizzare il mezzo continuo come un modello ideale atto a descrivere il comportamento di un materiale reale, o per lo meno una regione ristretta del suo comportamento. Infatti la definizione di un legame costitutivo di validità generale è praticamente impossibile in quanto:

- molte delle proprietà meccaniche più che essere delle costanti sono dei parametri legati alle variazioni di stato;
- l’anisotropia rende difficile la modellizzazione della risposta all’applicazione di uno stato tensionale generalizzato.

Il più semplice esempio di legge costitutiva è la legge dell'elasticità generale o legge di Hooke, ma si analizzeranno anche modelli più complessi, come ad esempio quello denominato "Cam Clay".

La risoluzione completa di un problema al contorno comporta poi, da un lato l'adozione di un legame costitutivo quasi sempre semplificato e dall'altro, l'idealizzazione della geometria e la scelta del metodo di analisi strettamente dipendente sia dal tipo di problema al contorno, sia dal legame costitutivo. Infatti le difficoltà cui si va incontro quando si voglia analizzare un problema tridimensionale costringono spesso ad una semplificazione della geometria, riconducendo il problema ad un caso bidimensionale, di tipo piano. Ciò richiede di individuare a priori gli aspetti più significativi del problema e i fattori che possono invece essere trascurati senza che la soluzione perda di significatività.

È pertanto prassi corrente, nell'analisi dei problemi al contorno, rinunciare a complessi modelli che descrivano con continuità l'evolversi del fenomeno deformativo fino alla rottura, in favore di modelli più semplici in grado di cogliere con maggiore affidabilità solo quel particolare aspetto che di volta in volta si vuole analizzare.

Ricapitolando dunque si può dire in linea generale che, nelle applicazioni pratiche, i terreni vengono assimilati a mezzi continui, sicché è possibile definire in ogni punto gli sforzi e le deformazioni, senza curarsi se il punto geometrico considerato ricada all'interno della particella solida o di un vuoto. Così operando si sostituisce al punto geometrico un volume elementare sufficientemente grande da contenere un gran numero di particelle e di vuoti, ma sufficientemente piccolo rispetto alle dimensioni geometriche del problema.

L'analisi dei mezzi continui deformabili si divide dunque in 3 parti fondamentali.

1. Analisi dello stato di sforzo in cui si considerano le relazioni tra le forze esterne che agiscono sul corpo e quelle che di conseguenza si originano al suo interno.
2. Analisi dello stato di deformazione in cui ci si occupa della descrizione dei moti da cui risulta la deformazione del corpo, che consiste in una dilatazione (pura variazione di volume, positiva o negativa) e/o in una distorsione (pura variazione di forma).

Queste due analisi vengono condotte in maniera completamente distinta e indipendente: la prima è basata, almeno in prima approssimazione, sulla meccanica dei corpi rigidi; la seconda su considerazioni puramente geometriche.

3. Analisi del comportamento idealizzato dei materiali reali, mediante la definizione di un'equazione costitutiva che stabilisca un'opportuna relazione fra lo sforzo e le deformazioni osservate. L'adozione di opportune equazioni costitutive, come detto, è suggerita dal comportamento dei materiali reali così come risulta da prove sperimentali, cioè in pratica lo studio delle leggi costitutive, *trait d'union* fra il tensore degli sforzi ed il tensore delle deformazioni, è usualmente svolto ricorrendo all'utilizzo di prove di laboratorio.

CAPITOLO 1

CONCETTI GENERALI

1.1. PROPRIETÀ GENERALI DELLE TERRE

Una terra nel suo stato naturale è formata da un insieme di granuli che costituiscono lo scheletro solido e da fluidi interstiziali, aria e/o acqua, contenuti negli spazi fra i granuli (pori).

Essa può dunque essere rappresentata come un sistema particellare multifase.

In figura 1.1a viene schematizzato un elemento di terreno costituito dalle tre fasi distinte:

- solida, rappresentata dalle particelle minerali
- liquida, rappresentata dall'acqua interstiziale
- gassosa, rappresentata dall'aria (priva di peso).

La descrizione di un elemento di terreno deve quindi riguardare innanzi tutto i rapporti in peso ed in volume delle varie fasi componenti.

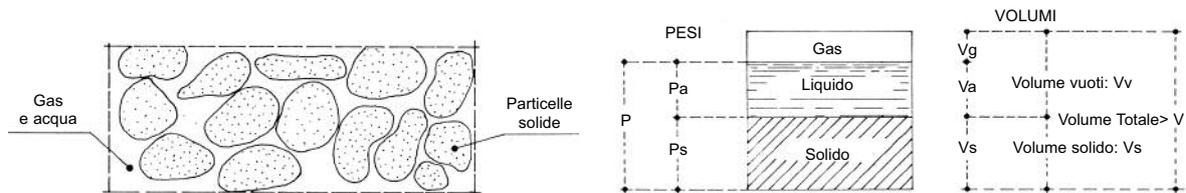


Figura 1.1a. Sezione schematica di un elemento di terreno.

Figura 1.1b. Schema delle fasi presenti in un terreno.

Le relazioni fondamentali sono le seguenti (figura 1.1b):

- e (indice dei vuoti) = volume dei vuoti (V_v) riferito al volume della fase solida (V_s) = V_v/V_s ;
- v = volume specifico = rapporto fra il volume totale V del terreno e il volume V_s occupato dalla sola parte granulare,

$$v = \frac{V}{V_s} = \frac{V_s + V_v}{V_s} = 1 + e$$

- n (porosità) = volume dei vuoti riferito al volume totale = V_v/V ;
- γ_n (peso dell'unità di volume) = rapporto tra il peso del terreno (P) ed il suo volume totale = P/V (kN/m^3);
- γ_d (peso secco dell'unità di volume) = rapporto tra il peso della sola fase solida (P_s) ed il volume totale = P_s/V (kN/m^3). Si differenzia dal precedente in quanto non considera il peso della fase liquida;
- γ_{sat} (peso di volume del terreno saturo) = rapporto fra il peso del terreno ed il volume totale nelle condizioni di completa saturazione del materiale = P_{sat}/V (kN/m^3);
- γ_s (peso di volume della parte solida – costituenti solidi) = rapporto fra peso e volume della sola parte solida = P_s/V_s (kN/m^3);
- γ' (peso di volume immerso) = peso di volume del terreno saturo meno il peso di volume dell'acqua (γ_w) = $\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w$ (kN/m^3);
- G_s (peso specifico dei granuli) = rapporto tra il peso di volume della parte solida ed il peso di volume dell'acqua = γ_s/γ_w (è un numero puro);
- w (contenuto in acqua) = rapporto tra peso della fase liquida (P_w) e peso della fase solida P_w/P_s (si esprime in %);

- S_r (grado di saturazione) = rapporto tra volume dei vuoti contenenti acqua e volume dei vuoti totale V_a/V (si esprime in %).

Dalla definizione deriva:

$w = 0\%$ = terreno secco $S_r = 0\%$

$V_v = V_a =$ terreno saturo $S_r = 100\%$.

1.2. LE TENSIONI NEL TERRENO ED IL CONCETTO DI TENSIONE EFFICACE

Come detto, in geotecnica per poter risolvere problemi connessi con la deformabilità dei terreni, utilizzando metodi di analisi propri della meccanica dei solidi, è necessario assimilare il terreno ad un mezzo continuo. Infatti sarebbe ovviamente impossibile studiare il comportamento meccanico di un sistema granulare in base alle forze che mutuamente si scambiano i singoli granuli ed agli spostamenti che ne conseguono, trattando il terreno come un sistema di corpi di dimensioni finite. Si sostituisce pertanto, all'insieme granulare, un mezzo continuo ed omogeneo, le cui caratteristiche restino le stesse, quali che siano le dimensioni dell'elemento considerato; ed infatti queste dimensioni potranno essere, al limite, infinite e definire "un punto" del mezzo considerato.

Conseguentemente al sistema delle forze e degli spostamenti intergranulari si sostituiscono le tensioni e le deformazioni del mezzo continuo.

La tensione totale è perciò il rapporto tra le forze che si scambiano due parti del terreno attraverso una superficie piana qualsiasi e l'area di questa superficie, indipendentemente dall'origine, natura e caratteristiche delle forze. È chiaro pertanto che queste tensioni, per il modo in cui sono definite, non hanno nulla a che vedere con le pressioni di contatto tra i granuli. La difficoltà concettuale maggiore rispetto a queste assimilazioni teoriche consiste nel fatto che, essendo gli interstizi interconnessi, cosicché l'acqua migra nei pori sospinta dalla differenza di carico idraulico, è necessario, per lo studio del comportamento del terreno, tener conto anche della pressione del fluido interstiziale. Viene così introdotta l'ipotesi che anche il fluido interstiziale possa essere considerato un continuo in cui è possibile definire in ogni punto la pressione u . In ultima analisi quindi il terreno è idealizzato come un mezzo formato da due continui che occupano lo stesso volume ed agiscono in parallelo: un continuo solido che obbedisce alle leggi della meccanica dei solidi, ed un continuo fluido che obbedisce alla meccanica dei fluidi; questo mezzo viene generalmente indicato con il termine di mezzo poroso. Si consideri un volume di terreno i cui spazi intergranulari siano occupati in parte da aria ed in parte da acqua e si immagini una superficie interna piana che lo divide in due parti senza intersecare alcun granulo, passando per i punti di mutuo contatto tra i granuli (figura 1.2a e b). Si possono allora considerare le forze che si trasmettono attraverso questa superficie ed il modo in cui si distribuiscono le fasi solide e fluide.

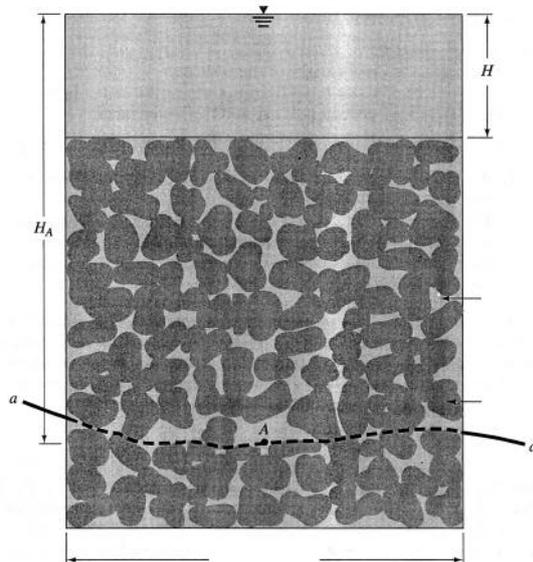


Figura 1.2a. Sezione schematica di un elemento di terreno con una ipotetica linea curva che lo divide in due parti.

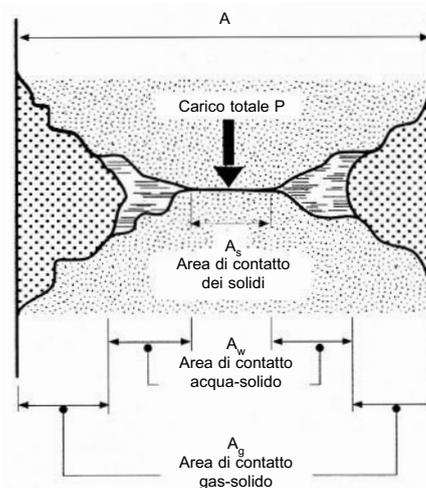


Figura 1.2b. Sezione schematica dell'area di contatto fra granulo e granulo.

Se A è l'area della superficie considerata, si ha: $A = A_w + A_g + A_s$, dove A_w e A_g sono rispettivamente le aree dei pori occupate rispettivamente da acqua ed aria ed A_s è l'area complessiva delle superfici di mutuo contatto dei granuli.

Si indichi con N la componente normale alla superficie di separazione della risultante delle forze che si trasmettono attraverso l'area A , con $\Sigma_i n'_i$ la componente normale delle azioni che si trasmettono i granuli attraverso le superfici di contatto interessate dalla sezione e con u_w e u_g rispettivamente le pressioni dell'acqua e dell'aria contenuta negli spazi intergranulari. La condizione di equilibrio in direzione normale alla sezione considerata fa sì che valga la relazione: $N = \Sigma_i n'_i + u_w A_w + u_g A_g$. Dal momento poi che non è possibile trasmettere sollecitazioni tangenziali nei liquidi e nei gas, le condizioni di equilibrio nelle altre due direzioni, ortogonali fra loro e tangenti alla superficie di separazione, saranno date semplicemente da:

$$T = \Sigma_i t'_i$$

dove:

T e $\Sigma_i t'_i$ sono le componenti tangenziali delle forze le cui componenti normali sono N e $\Sigma_i n'_i$ già definite.

Introducendo le tensioni totali, normali e tangenziali, $\sigma = N/A$ e $\tau = T/A$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma &= \Sigma_i n'_i / A + (u_w A_w + u_g A_g) / A \\ \tau &= \Sigma_i t'_i / A\end{aligned}$$

Si definisce tensione efficace il rapporto $\sigma' = \Sigma_i n'_i / A$ che esprime gli sforzi che, in una data sezione si trasmettono entro la massa granulare attraverso le particelle solide. Si ha allora:

$$\sigma = \sigma' + (u_w A_w + u_g A_g) / A$$

Le due pressioni dei fluidi sono diverse fra loro, ma di fatto la differenza $u_w - u_g$ è trascurabile quando il volume del gas è piccolo rispetto a quello dell'acqua, cioè quando il grado di saturazione S_r è prossimo all'unità. In tale contesto si può porre $u_w = u_g = u$ (pressione interstiziale o pressione neutra) e risulta:

$$\sigma = \sigma' + u (A_w + A_g) / A$$

Sapendo che: $A_w + A_g = A - A_s$ e che in caso di completa saturazione $A_g = 0$, si ottiene $\sigma = \sigma' + u (1 - A_s / A)$. Poiché inoltre l'area di contatto fra i granuli è molto piccola, cioè $A_s / A \ll 1$, risulta:

$$\sigma = \sigma' + u \quad (1.1)$$

Questa relazione esprime la ripartizione fra la fase liquida e solida delle sollecitazioni applicate ad una massa granulare e mostra che, della tensione totale applicata, una parte viene sopportata dai fluidi interstiziali (pressione neutra) ed una parte dallo scheletro solido (pressione efficace). Le tensioni tangenziali non sono influenzate dall'acqua.

Contemporaneamente, la compatibilità fra i due continui richiede che la diminuzione di volume del continuo solido sia uguale al volume d'acqua che da quel volume viene espulso, dal momento che sia le particelle solide che l'acqua sono assunti incompressibili.

Il comportamento del mezzo poroso saturo è retto quindi dal cosiddetto principio delle tensioni effettive, legato ad un fondamentale risultato sperimentale ottenuto da Terzaghi nel 1923. Infatti, confrontando il comportamento di campioni di terreno saturi sottoposti a stati tensionali che differivano solo per il valore della pressione dell'acqua, egli si accorse che la resistenza e la deformabilità erano le stesse. Ne concluse che la pressione dell'acqua, di per sé, non ha alcuna influenza sul comportamento meccanico del terreno e la chiamò pressione neutra.

Il principio, la cui validità è ormai provata da un'amplissima evidenza sperimentale, in linea generale può enunciarsi come segue: detta tensione efficace (σ') la differenza fra la tensione normale totale agente sul campione scheletro solido-acqua e la pressione dell'acqua (o pressione neutra u), le deformazioni del terreno e la sua resistenza a rottura dipendono solo dalla tensione efficace definita come:

$$\sigma' = \sigma - u \quad (1.2a)$$

L'intensità della pressione totale e della pressione neutra si possono calcolare (paragrafo 1.3), mentre la tensione efficace è una grandezza fisica non misurabile direttamente, ma solo deducibile per differenza secondo la (1.2a). Per capire qualitativamente l'aspetto fisico della differenza fra la tensione totale e quella effettiva, si consideri una sfera appoggiata su una bilancia (figura 1.3). Essa ha un volume di $0,100 \text{ m}^3$ ed un peso (forza di contatto) di $2,60 \text{ kN}$.

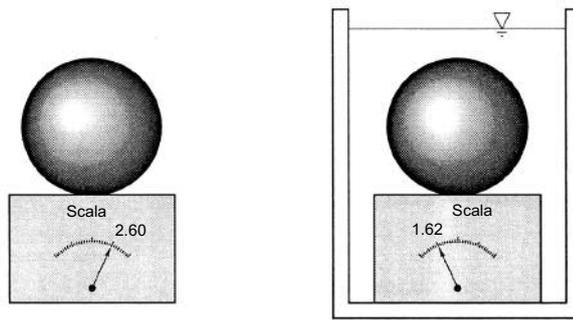


Figura 1.3

Si ponga ora la bilancia, con la sfera appoggiata sopra, all'interno di un contenitore pieno d'acqua. In questo nuovo ambiente la sfera è soggetta ad una spinta di galleggiamento F_B (*buoyancy force*), diretta verso l'alto e uguale al peso dell'acqua spostata, cioè:

$$F_B = V \cdot \gamma_w = (0.100 \text{ m}^3) \cdot (9.8 \text{ kN/m}^3) = 0.98 \text{ kN}$$

La forza di contatto fra la sfera e la bilancia si è pertanto ridotta a:

$$F = 2.60 \text{ kN} - 0.98 \text{ kN} = 1.62 \text{ kN}$$

Il peso della sfera non è cambiato, ma semplicemente ora è in parte supportato dalla bilancia ed in parte dall'acqua. Le forze di contatto fra le particelle di suolo che si trovano sopra il livello di falda sono simili a quelle che ci sono fra la sfera "allo stato secco" e la bilancia, mentre il suolo sotto falda è simile alla sfera immersa in acqua. Le forze di galleggiamento agiscono sulle particelle solide del terreno allo stesso modo in cui agiscono sulla sfera.

1.3. LA TENSIONE GEOSTATICA

La tensione geostatica (σ) è legata alla forza di gravità che agisce sul suolo, quindi la risultante è diretta verticalmente verso il basso. Per calcolare la tensione geostatica in un punto posto ad una certa profondità al di sotto del piano campagna, si immagini una colonna verticale che rappresenti il suolo di densità uniforme ρ e di sezione trasversale di area A , posta a distanza h dalla superficie superiore (figura 1.4a). La forza F è rappresentata dal peso W della parte superiore della colonna e la tensione che essa induce si scarica sull'area A (figura 1.4b):

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{W}{A}$$

Il peso W risulta essere:

$$W = \rho \cdot g \cdot V$$

dove:

ρ = densità

g = accelerazione di gravità

V = volume della parte superiore della colonna ($V = A \cdot h$).

Quindi si ottiene:

$$\sigma = \frac{\rho g (Ah)}{A} \Rightarrow \sigma = \rho g h$$

ed in termini di peso dell'unità di volume ($\gamma = \rho g$):

$$\sigma = \gamma h \quad (1.3a)$$

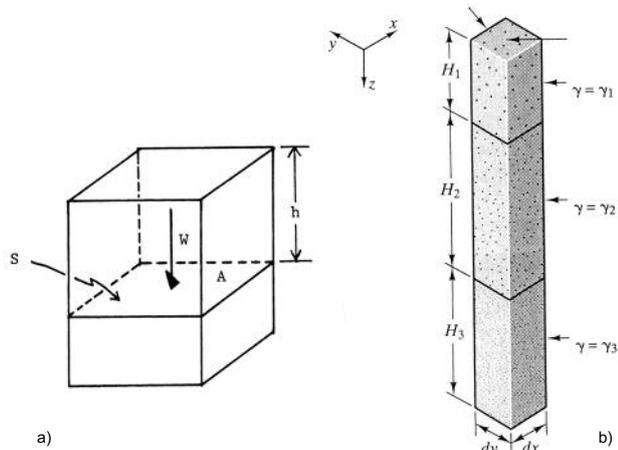


Figura 1.4. Colonna verticale rappresentativa di una porzione di terreno in profondità.

L'unità di misura è $\frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \text{m} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \text{kPa}$.

Analogamente alla (1.3a) la pressione neutra u può essere calcolata come:

$$u = \gamma_w h_w \quad (1.3b)$$

dove:

γ_w = peso di volume dell'acqua (= 9.8 kN/m³)

h_w = altezza di risalita della falda.

Per calcolare la tensione effettiva secondo la (1.2a), è sufficiente utilizzare il valore del peso di volume immerso γ' , per cui:

$$\sigma' = \gamma' h \quad (1.2b)$$

La determinazione delle pressioni orizzontali σ_x e σ_y generalmente prodotte, anche se indirettamente, dalla tensione litostatica (e da altre tensioni eventualmente indotte), è invece assai meno agevole. Quando una tensione compressiva verticale è applicata ad un elemento, essa induce sia una deformazione verticale (deformazione compressiva), sia una deformazione orizzontale (dilatazione).

Il suolo tuttavia è confinato lateralmente e gli elementi adiacenti tendono anch'essi ad espandersi, ma in direzione opposta.

Queste forze opposte possono cancellarsi a vicenda (cioè non c'è produzione di deformazione orizzontale o comunque è molto piccola rispetto a quella di un corpo non confinato), ma resta il fatto che si è generata tensione orizzontale nel suolo.

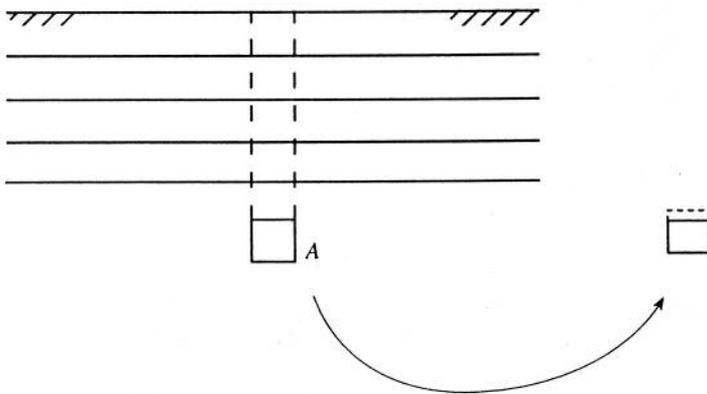


Figura 1.5. Deformazione di un elemento di terreno situato ad una certa profondità, dovuta al carico del terreno soprastante.

Per simmetria si può assumere $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_h$ e vale anche la relazione: $\sigma'_h = \sigma_h - u$.

Si consideri l'elementino di terreno indicato in figura 1.5. Durante la fase di deposizione, a mano a mano che lo strato di terreno soprastante aumenta di spessore, il carico verticale aumenta ed induce le deformazioni verticali ϵ_v , mentre le deformazioni laterali sono impedito. Esiste quindi una relazione di proporzionalità diretta tra incrementi di tensione verticale e orizzontale.

Se il terreno fosse elastico lineare e isotropo, la relazione (come si vedrà

nel capitolo V) varrebbe $\sigma'_h = \nu/(1-\nu) \sigma'_v$ (dove ν = rapporto di Poisson), cioè la tensione orizzontale cresce proporzionalmente allo spessore del terreno soprastante.

Benché il comportamento del terreno non sia né elastico né tanto meno lineare, nel caso di terreni normal consolidati (NC) – quelli cioè che in passato non hanno mai subito carichi superiori a quelli attuali – sperimentalmente si nota che vale una relazione analoga, del tipo:

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v \quad (1.4)$$

dove K_0 = coefficiente di spinta a riposo, pari al rapporto fra tensione (effettiva) orizzontale e verticale in condizioni di deformazione orizzontale nulla ($\epsilon_x = \epsilon_y = 0$), rimane costante con la profondità.

Durante l'eventuale fase di scarico diminuisce anche il valore di σ'_h e poiché solo parte della deforma-

zione subita dal terreno viene recuperata (comportamento non elastico), il valore di σ'_h varia in modo non lineare con σ'_v .

Pertanto nei terreni sovraconsolidati (quelli cioè che in passato hanno subito tensioni superiori a quelle che stanno subendo attualmente, soprattutto in seguito a fenomeni di erosione, variazioni del livello di falda e/o a fattori quali l'invecchiamento – *aging* – o a processi di diagenesi), si adotta ancora un'equazione simile alla precedente, ma utilizzando anche il valore di OCR (*over consolidation ratio*) definito come il rapporto fra la massima tensione (effettiva) verticale cui il terreno è stato sottoposto nel corso della sua storia precedente e la presente tensione (effettiva) verticale in sito.

Nei terreni reali dunque, non elastici, le tensioni orizzontali devono essere valutate sperimentalmente, operazione quest'ultima tutt'altro che semplice e per la quale sono state suggerite numerose procedure ed attrezzature (ad esempio pressiometro – PMT –, dilatometro – DMT), oppure possono essere stimate analiticamente partendo dalla tensione verticale σ_z mediante la relazione (1.4).

A sua volta in linea teorica, come detto, in un mezzo linearmente elastico il valore di K_0 dovrebbe valere: $k_0 = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\nu}{1-\nu}$, invece nei terreni reali, non elastici, occorre tener conto della storia delle sollecitazioni.

Per i terreni NC un'ampia evidenza sperimentale avvalorata la relazione di Jaky:

$$K_0 = 1 - \text{sen}\phi \quad (\text{dove } \phi = \text{angolo di attrito del materiale}) \quad (1.5)$$

Nei terreni OC si utilizza invece un'espressione del tipo:

$$k_{0(OC)} = (1 - \text{sen}\phi) \cdot \text{OCR}^{\text{sen}\phi} \quad (1.6)$$

dove OCR è il rapporto di sovraconsolidazione.

1.4. VARIAZIONI DELLE TENSIONI A CAUSA DELLA FILTRAZIONE DELL'ACQUA

Il fatto che il comportamento meccanico del terreno dipenda dallo sforzo efficace implica che, per poterlo calcolare, occorre valutare anche la pressione neutra in ogni punto.

Dal punto di vista idraulico si possono distinguere tre situazioni:

- falda in quiete
- regime di flusso stazionario
- regime di flusso transitorio.

La (1.3b) è valida per falde in quiete. Se invece la falda è in movimento (come ad esempio a seguito di scavi sostenuti da pareti e realizzati sotto falda) essa esercita un'ulteriore forza (forza di filtrazione o *seepage force*) sulle particelle solide, con conseguente variazione dei valori della pressione neutra u .

Si consideri ad esempio un recipiente riempito per l'altezza h_2 con materiale granulare e per l'altezza $(h_1 + h_2)$ con acqua (figura 1.6).

Al fondo del recipiente è attaccato un tubo collegato con un serbatoio nel quale l'acqua inizialmente è allo stesso livello del recipiente con il materiale granulare e sta quindi in quiete.

Qualunque sia la posizione del pelo dell'acqua nel recipiente di sinistra, la pressione totale su una sezione orizzontale AA posta a profondità z al di sotto della superficie della sabbia è sempre uguale a:

$$\sigma = z\gamma_{\text{sat}} + \gamma_w h_1$$

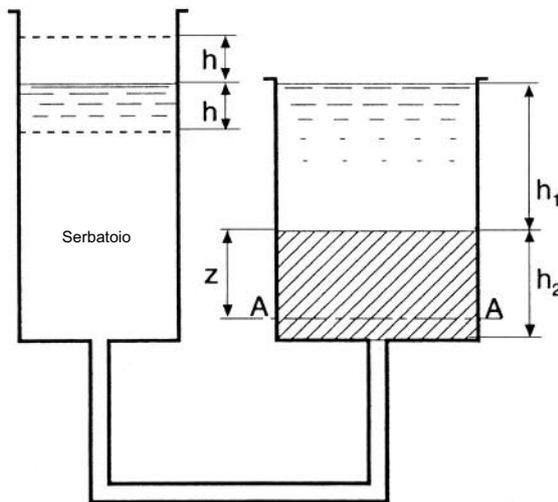


Figura 1.6.

Quando il livello dell'acqua è alla medesima altezza in ambedue i recipienti, la pressione neutra vale:

$$u = (h_1 + z) \gamma_w$$

La pressione effettiva corrispondente vale quindi:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma - u = (z\gamma_{\text{sat}} + \gamma_w h_1) - (h_1 + z) \gamma_w = \\ &= z (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \Rightarrow \sigma' = z\gamma' \end{aligned}$$

Si immagini ora, mantenendo fisso il livello dell'acqua nel recipiente di destra, di abbassare di un'altezza pari ad h il serbatoio di sinistra. Si genera in tal modo una differenza di carico idraulico e un conseguente movimento dell'acqua dal recipiente al serbatoio. Poiché la perdita di carico avviene praticamente tutta nel materiale granulare contenuto nel recipiente, la pressione neutra al fondo del recipiente stesso può essere espressa da:

$$u = (h_1 + h_2 - h) \gamma_w$$

Come si vede la pressione neutra è diminuita del valore $h\gamma_w$ rispetto a quello che si ha in condizioni di acqua ferma. D'altra parte, poiché la pressione totale al fondo del recipiente è determinata soltanto dal peso del terreno e da quello dell'acqua al di sopra di esso, ciò significa che essa è rimasta sempre la stessa e conseguentemente la pressione neutra è aumentata della quantità $h\gamma_w$. A sua volta, sul generico piano AA, la pressione neutra sarà diminuita (e di conseguenza la pressione effettiva è aumentata) della quantità $h_z\gamma_w$. Tale quantità, supponendo una dissipazione del carico idraulico uniforme (tale per cui se l'altezza h_2 del campione dissipa l'intero carico idraulico h , l'altezza z dissiperà il carico h_z) vale:

$$z(h/h_2) \gamma_w$$

Alla base del campione dunque, dove è stato dissipato l'intero carico h , la pressione neutra è diminuita di $h\gamma_w$ e, poiché il gradiente idraulico i che si è instaurato in seguito al flusso d'acqua è pari a:

$$i = h/h_2$$

e quindi:

$$h = ih_2$$

si può scrivere che essa è diminuita della quantità $ih_2\gamma_w$. Analogamente, ad una qualsiasi profondità z dalla superficie del terreno, essa viene proporzionalmente ridotta del valore $\Delta u = iz\gamma_w$.

Se il livello dell'acqua nel serbatoio viene invece innalzato di una quantità h , l'acqua comincerà a scorrere dal serbatoio stesso verso il recipiente. In tal caso, la pressione neutra alla base del recipiente (dove ancora non vi è stata alcuna dissipazione di carico) vale:

$$u = (h_1 + h_2 + h) \gamma_w$$

e, come si vede, aumenta del valore $h\gamma_w$ rispetto a quello che si ha al tetto del campione. A sua volta, sul generico piano AA, la pressione neutra sarà aumentata della quantità $h_z\gamma_w$ (che rappresenta l'aliquota di carico idraulico non ancora dissipato). Tale quantità anche in questo caso vale: $\Delta u = iz\gamma_w$.

Alla luce di questa semplice esposizione si può pertanto dire che, in caso di moti di filtrazione, la (1.2a) deve essere riscritta nella seguente maniera:

$$\sigma' = (\sigma - u) \pm \Delta u$$

ossia:

$$\sigma' = z\gamma' \pm iz\gamma_w \quad (1.7)$$

dove:

Δu è la variazione di pressione neutra legata alla filtrazione ed il segno + o - sta ad indicare se essa è rivolta verso il basso (+) o verso l'alto (-).

ESEMPIO 1-1

Un terreno ha un peso di volume pari a $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$. La pressione neutra è idrostatica e il livello di falda coincide con il piano campagna. Si può ipotizzare un valore del coefficiente di spinta a riposo pari a:

$$K_0 = 0.5$$

Calcolare lo sforzo totale ed efficace verticale ed orizzontale alla profondità di 10 m dal piano campagna.

Gli sforzi verticali valgono:

$$\sigma_v = \gamma \cdot z = 20 \cdot 10 = 200 \text{ kN/m}^2$$

$$u = \gamma_w \cdot z = 9.81 \cdot 10 = 98 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = 200 - 98 = 102 \text{ kN/m}^2$$

Gli sforzi orizzontali valgono:

$$\sigma'_h = K_0 \sigma'_v = 0.5 \cdot 102 = 51 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_h = \sigma'_h + u = 51 + 98 = 149 \text{ kN/m}^2.$$

ESEMPIO 1-2

La figura E1-2 mostra un apparecchio di prova in cui un campione è messo all'interno di una cella riempita di fluido il quale esercita uno stato tensionale isotropo σ sul campione stesso (apparecchio triassiale) e dei trasduttori di spostamento (A e B) permettono di misurare le variazioni di dimensioni del campione.

All'inizio della prova lo sforzo totale vale $\sigma = 17 \text{ kN/m}^2$ e la pressione dei pori è pari a $u = 10 \text{ kN/m}^2$. Alla fine della prova lo sforzo totale viene portato a $\sigma = 1000 \text{ kN/m}^2$.

Calcolare il valore della pressione interstiziale u alla fine della prova.

Dal momento che non c'è variazione di volume, lo sforzo effettivo rimane costante.

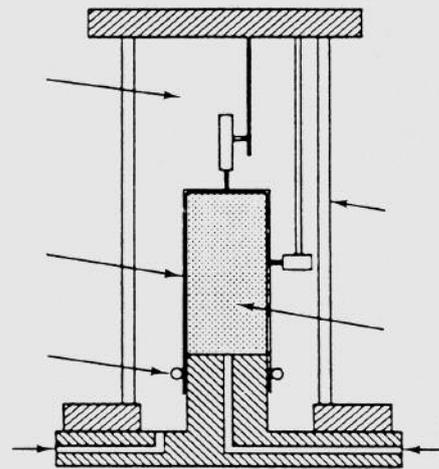


Figura E1.2.

ALL'INIZIO DELLA PROVA

$$\sigma' = \sigma - u = 17 - 10 = 7 \text{ kN/m}^2$$

ALLA FINE DELLA PROVA

$$\sigma' = \sigma - u = 1000 - u = 7 \text{ kN/m}^2$$

$$u = 1000 - 7 = 993 \text{ kN/m}^2$$

ESEMPIO 1-3

L'apparecchio di prova è simile a quello descritto nell'esempio 1-2 ed in questo caso il volume di acqua che entra o esce dal campione viene misurato mediante un serbatoio graduato (figura E1.3).

Lo sforzo totale σ viene mantenuto costante ($\sigma = 17 \text{ kN/m}^2$), mentre la pressione dei pori u cambia e a fine prova $u = 15 \text{ kN/m}^2$.

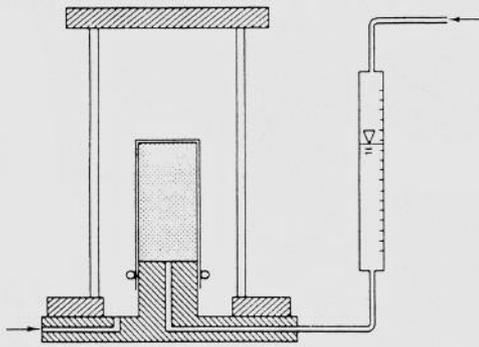


Figura E1.3.

Calcolare lo sforzo effettivo σ' alla fine della prova.

Dal momento che la pressione dei pori cambia, conseguentemente cambia anche il volume del campione.

ALL'INIZIO DELLA PROVA

$$\sigma = 17 \text{ kN/m}^2 \quad u = 10 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \sigma' = 7 \text{ kN/m}^2$$

ALLA FINE DELLA PROVA

$$\sigma = 17 \text{ kN/m}^2 \quad u = 15 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \sigma' = 2 \text{ kN/m}^2$$

ESEMPIO 1-4

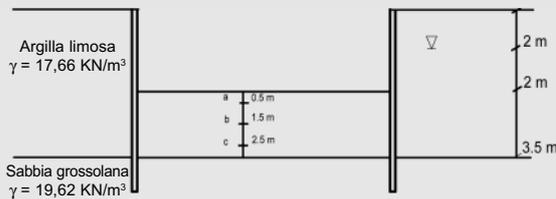


Figura E1.4.

Si è realizzato uno scavo secondo la geometria e la stratigrafia riportata in figura E1.4. Nell'ipotesi che la falda contenuta nelle sabbie sottostanti debba essere mantenuta a fondo scavo per un periodo di tempo sufficientemente lungo da instaurare un moto di filtrazione, calcolare i valori della tensione efficace σ' nei punti A, B, C. La tensione efficace, in base alla (1.7), vale:

$$\sigma' = (\sigma - u) - \Delta u$$

ossia:

$$\sigma' = z\gamma' - iz\gamma_w$$

Il segno $-$ sta ad indicare che la filtrazione è diretta verso l'alto con un conseguente aumento della pressione neutra.

Si calcola dapprima il gradiente che si instaura in seguito al moto di filtrazione, ipotizzando che il carico venga dissipato prevalentemente all'interno delle argille. Nello specifico esso è pari a:

$$i = h/L = 2/3.5 = 0,571$$

Il peso di volume immerso vale:

$$\gamma' = \gamma_{\text{sat}} - \gamma_w = 17.66 - 9.81 = 7.848 \text{ kN/m}^3$$

- Punto A ($z = 0.5 \text{ m}$)
 $\sigma' = (0.5 \cdot 7.848) - (0.571 \cdot 0.5 \cdot 9.81) = 1.12 \text{ kN/m}^2$.
- Punto B ($z = 1.5 \text{ m}$)
 $\sigma' = (1.5 \cdot 7.848) - (0.571 \cdot 1.5 \cdot 9.81) = 3.36 \text{ kN/m}^2$.
- Punto C ($z = 2.5 \text{ m}$)
 $\sigma' = (2.5 \cdot 7.848) - (0.571 \cdot 2.5 \cdot 9.81) = 5.6 \text{ kN/m}^2$.