

STEFANO BERGERO ■ PAOLO CAVALLETTI ■ ANNA CHIARI

Scheda sul sito >

PROBLEMI DI FISICA TECNICA

100 ESERCIZI RISOLTI E RAGIONATI

DARIO FLACCOVIO EDITORE

Stefano Bergero Paolo Cavalletti Anna Chiari

PROBLEMI DI FISICA TECNICA

100 ESERCIZI SVOLTI E RAGIONATI



Dario Flaccovio Editore

Stefano Bergero – Paolo Cavalletti – Anna Chiari

PROBLEMI DI FISICA TECNICA

100 esercizi risolti e ragionati

ISBN 978-88-579-0279-1

© 2014 by Dario Flaccovio Editore s.r.l. - tel. 0916700686

www.darioflaccovio.it info@darioflaccovio.it

Prima edizione: marzo 2014

Cavalletti, Paolo <1963->

Problemi di fisica tecnica : 100 esercizi risolti e ragionati / Paolo Cavalletti, Stefano Bergero, Anna Chiari. - Palermo : D. Flaccovio, 2014.

ISBN 978-88-579-0279-1

I. Fisica tecnica.

I. Bergero, Stefano <1972->.

II. Chiari, Anna <1966->.

621 CDD-22

SBN PAL0266382

CIP – Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"

Stampa: Tipografia Priulla, Palermo, marzo 2014

Nomi e marchi citati sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

L'editore dichiara la propria disponibilità ad adempiere agli obblighi di legge nei confronti degli aventi diritto sulle opere riprodotte.

La fotocopiatura dei libri è un reato.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata dagli aventi diritto/dall'editore.

INDICE

INTRODUZIONE	7
--------------	---

Capitolo 1

FISICA GENERALE	9
-----------------	---

1.1	Cinematica	9
1.2	Dinamica	15
1.3	Lavoro - energia	26
1.4	Statica dei fluidi	35
1.5	Circuiti elettrici	45
1.6	Formulario	54

Capitolo 2

TERMODINAMICA	63
---------------	----

2.1	Gas perfetti	63
2.2	Primo principio della termodinamica per sistemi chiusi	66
2.3	Primo principio della termodinamica per sistemi aperti	77
2.4	Dinamica dei fluidi	90
2.5	Sostanze pure	111
2.6	Macchine termiche CARNOT	115
2.7	Ciclo inverso a compressione di vapore	118
2.8	Formulario	130

Capitolo 3

TRASMISSIONE DEL CALORE	143
-------------------------	-----

3.1	Conduzione	143
3.2	Convezione	147
3.3	Irraggiamento	150
3.4	Meccanismi combinati	152
3.5	Trasmittanza di pareti per l'edilizia	167
3.6	Formulario	183

Capitolo 4

TERMOIGROMETRIA E IMPIANTI	197
----------------------------	-----

4.1	Condensazione	197
4.2	Bilancio del locale e riscaldamento	211
4.3	Trasformazioni dell'aria umida	228

4.4	Impianti di condizionamento	245
4.5	Formulario	261

BIBLIOGRAFIA	271
---------------------	------------

APPENDICE	273
------------------	------------

A.1	Proprietà dei gas perfetti a 300 K	273
A.2	Proprietà termofisiche dell'acqua allo stato liquido in condizioni di saturazione	274
A.3	Proprietà termofisiche dell'aria a 101325 Pa	275
A.4	Diagramma di Moody per il calcolo del fattore di attrito nelle tubazioni	276
A.5	Coefficienti di resistenza localizzata ξ per il calcolo delle perdite di carico concentrate	277
A.6	Diagramma p-H del refrigerante R410A	278
A.7	Diagramma p-H del refrigerante R134a	279
A.8	Resistenze termiche superficiali	280
A.9	Resistenza termica di intercapedini d'aria [$\text{m}^2\text{K/W}$]	280
A.10	Pressione di saturazione dell'acqua [Pa]	281
A.11	Diagramma psicrometrico	282

INTRODUZIONE

Il testo presenta cento problemi di Fisica Tecnica interamente risolti e ragionati e si propone come sussidio didattico per la preparazione all'esame degli allievi architetti e ingegneri.

Sono stati raccolti esercizi svolti in aula e prove d'esame, seguendo il programma che gli autori, ormai da quindici anni, svolgono nell'ambito dei corsi di Fisica Tecnica dei diversi corsi di studio in Architettura e Ingegneria della Scuola Politecnica dell'Università di Genova.

Senza alcuna velleità di competizione con i testi tradizionali disponibili, le ragioni che hanno spinto gli autori ad intraprendere la stesura dell'opera sono essenzialmente due.

La prima è di completare con esercizi ed applicazioni numeriche i due testi teorici precedentemente pubblicati, "Appunti di Termodinamica" e "Appunti di Trasmissione del Calore", per i cui dettagli si rimanda alla bibliografia.

La seconda è quella di rispondere ad una particolare esigenza dei corsi di studio in Architettura. Infatti una delle caratteristiche comuni a quasi tutti i corsi presenti sul territorio nazionale è la mancanza di insegnamenti di Fisica Generale propedeutici allo studio della Fisica Tecnica e degli Impianti. È in genere compito dei docenti di Fisica Tecnica, tenendo conto della differente provenienza scolastica degli studenti, fornire agli stessi quelle nozioni di base di meccanica ed elettricità assolutamente indispensabili per affrontare lo studio della fisica dell'edificio. Ciò spiega l'inserimento nel testo, prima dei tipici argomenti della Fisica Tecnica, di un capitolo iniziale che propone alcuni problemi di Fisica Generale, per il quale è stato necessario un rigoroso lavoro di uniformizzazione della nomenclatura, dal momento che le varie grandezze fisiche sono tradizionalmente indicate in modo differente nei testi di Fisica e di Fisica Tecnica.

Lo scopo del presente testo è specificatamente didattico; lo schema con cui vengono proposti gli esercizi è quello di guidare l'apprendimento dello studente passo dopo passo, attraverso la risoluzione sia di problemi scolastici, sia di problemi applicativi, proposti in modo semplificato, con riferimenti alla pratica progettuale e alla normativa tecnica vigente. Una solida preparazione fisico-tecnica è ormai infatti estremamente importante in ambito professionale, dato il proliferare di norme tecniche sempre più complesse sia in campo impiantistico che acustico.

Il libro è suddiviso in 4 capitoli.

Nel primo capitolo "Fisica Generale" sono presentati alcuni esercizi di meccanica ed elettricità, limitati agli argomenti strettamente necessari per la comprensione dei fenomeni fisico-tecnici dell'ambiente costruito.

Nel secondo capitolo "Termodinamica" sono proposti esercizi riguardanti l'applicazione del primo principio della termodinamica per i sistemi chiusi e aperti, la dinamica dei fluidi e le macchine termiche a ciclo inverso.

Nel terzo capitolo "Trasmissione del Calore" i problemi riguardano sia i singoli meccanismi di scambio termico, conduzione convezione e irraggiamento, sia la presenza combinata degli stessi, con particolare riferimento allo scambio termico attraverso le pareti degli edifici.

Nel quarto capitolo "Termoigrometria e Impianti" vengono proposte applicazioni riguardanti la psicrometria, la verifica termoigrometrica dell'involucro edilizio, il bilancio termoigrometrico del locale climatizzato e gli impianti di condizionamento.

Al termine di ogni capitolo è inserito un formulario, dove sono elencate le formule utilizzate nella risoluzione dei problemi e le ipotesi di calcolo adottate.

Chiude il libro un'Appendice in cui sono riportati i grafici e le tabelle necessari per la risoluzione degli esercizi.

Si ringraziano fin d'ora quanti, colleghi e studenti, vorranno apportare critiche costruttive e suggerimenti che saranno tenuti in considerazione per eventuali aggiornamenti e/o ampliamenti dell'opera.

Genova, 13 gennaio 2014

Gli Autori

Capitolo 1

FISICA GENERALE

1.1 Cinematica

Esercizio 1

Un aereo tocca la pista di atterraggio con velocità pari a 420 km/h e in 25 s raggiunge una velocità pari a 50 km/h. Determinare:

- l'accelerazione dell'aereo (modulo, direzione e verso), supposta uniforme, e lo spazio percorso nella frenata,
- ipotizzando che l'aereo proceda con velocità costante, il tempo impiegato a percorrere ulteriori 1500 m.

Risoluzione

$$w_1 = 420 \text{ km/h} = 116.7 \text{ m/s}$$

$$w_2 = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/s}$$

$$\tau_{1,2} = 25 \text{ s}$$

$$s_{2,3} = 1500 \text{ m}$$

Ipotizzando che nel tratto 1-2 l'aereo si muova di moto rettilineo uniformemente accelerato in direzione x, si ottiene:

$$w_2 = w_1 + a_x \tau_{1,2}$$

$$\text{➤ } a_x = \frac{w_2 - w_1}{\tau_{1,2}} = \frac{13.9 - 116.7}{25} = -4.11 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ne segue che il vettore accelerazione risulta:

modulo: $a = 4.11 \text{ m/s}^2$

direzione: quella di x

verso: quello opposto alla direzione del moto (decelerazione)

Lo spazio percorso nella frenata vale:

$$w_2^2 = w_1^2 + 2a_x s_{1,2}$$

$$\text{➤ } s_{1,2} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2a_x} = \frac{13.9^2 - 116.7^2}{2 \cdot (-4.11)} = 1633 \text{ m}$$

Essendo da 2 a 3 il moto rettilineo uniforme, si ha:

$$s_{2,3} = w_2 \tau_{2,3}$$

$$\tau_{2,3} = \frac{s_{2,3}}{w_2} = \frac{1500}{13.9} = 108 \text{ s}$$

Esercizio 2

Il tapis roulant di un aeroporto si muove con una velocità di 10 km/h ed è lungo 35 m. Determinare:

- il tempo impiegato da una persona a percorrere tutta la lunghezza nel caso in cui sia ferma oppure cammini sul tapis alla velocità di 6 km/h.

Un bambino si diverte a percorrere il tapis roulant in senso inverso. Determinare:

- a quale velocità deve correre il bambino per percorrere l'intera lunghezza del tapis in 40 secondi.

Considerando che lo stesso corra alla velocità appena calcolata, determinare:

- dopo quanto tempo e a che distanza dall'ingresso del tapis si incontrano la persona ferma sul tapis ed il bambino se partono nello stesso istante.

Risoluzione

$$w_t = 10 \text{ km/h} = 2.78 \text{ m/s}$$

$$L = 35 \text{ m}$$

$$w_p = 6 \text{ km/h} = 1.67 \text{ m/s}$$

$$\tau_b = 40 \text{ s}$$

Nel caso in cui la persona è ferma sul tapis ($w_p = 0$), la sua velocità di percorrenza del tappeto risulta:

$$w_{w_p=0} = w_t = 2.78 \text{ m/s}$$

Nel caso in cui la velocità della persona rispetto al tapis è pari a 6 km/h, la sua velocità di percorrenza del tappeto risulta:

$$w_{w_p=6} = w_t + w_p = 2.78 + 1.67 = 4.45 \text{ m/s}$$

Applicando la legge del moto rettilineo uniforme, si determina il tempo impiegato dalla persona a percorrere il tapis roulant nelle due situazioni:

$$\text{➤ } \tau_{w_p=0} = \frac{L}{w_{w_p=0}} = \frac{35}{2.78} = 12.6 \text{ s}$$

$$\text{➤ } \tau_{w_p=6} = \frac{L}{w_{w_p=6}} = \frac{35}{4.45} = 7.9 \text{ s}$$

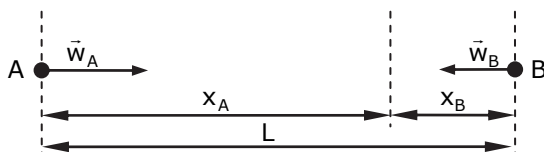
Se il bambino percorresse il tapis fermo in senso inverso, la sua velocità di percorrenza del tappeto risulterebbe:

$$w_{b'} = \frac{L}{\tau_b} = \frac{35}{40} = 0.88 \text{ m/s}$$

Se il tapis è in moto, il bambino deve quindi correre in senso inverso rispetto al tappeto con una velocità:

$$\text{➤ } w_b = w_t + w_{b'} = 2.78 + 0.88 = 3.66 \text{ m/s} = 13.2 \text{ km/h}$$

Siano, rispetto a terra, $w_A = 2.78 \text{ m/s}$ la velocità della persona ferma sul tapis, nella direzione del tapis, $w_B = 0.88 \text{ m/s}$ la velocità del bambino che corre in verso contrario e x_A e x_B le distanze dall'ingresso e dall'uscita del tapis del punto di incontro, così come rappresentato in figura.



Applicando la legge del moto rettilineo uniforme e considerando che la persona ed il bimbo partono contemporaneamente, si ottiene:

$$\tau = \frac{x_A}{w_A} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{x_B}{w_B} = \frac{L - x_A}{w_B} \quad (2)$$

Uguagliando la (1) e la (2), si ottiene:

$$\Rightarrow x_A = \frac{L}{w_B \left(\frac{1}{w_B} + \frac{1}{w_A} \right)} = \frac{35}{0.88 \left(\frac{1}{0.88} + \frac{1}{2.78} \right)} = 26.58 \text{ m}$$

Dalla (1) si ricava il tempo dopo cui si incontrano il bimbo e la persona:

$$\Rightarrow \tau = \frac{26.58}{2.78} = 9.6 \text{ s}$$

Esercizio 3

Due corpi A e B partono dallo stesso punto. Il corpo A parte da fermo con un'accelerazione costante di 1.8 m/s^2 .

Se il corpo B parte nello stesso istante del corpo A con una velocità di 3.5 m/s e con un'accelerazione costante di 2.5 m/s^2 , determinare:

- dopo quanto tempo, rispetto alla partenza, il corpo B raggiunge una velocità doppia rispetto al corpo A,
- lo spazio percorso dai due corpi.

Se invece il corpo B parte da fermo 30 secondi dopo il corpo A, determinare:

- l'accelerazione che dovrebbe avere il corpo B per raggiungere il corpo A in 20 secondi,
- la velocità dei due corpi quando il corpo B raggiunge il corpo A.

Risoluzione

$$w_{x0,A} = 0 \text{ m/s}$$

$$a_{x,A} = 1.8 \text{ m/s}^2$$

I dati relativi al primo quesito sono i seguenti:

$$w_{x0,B} = 3.5 \text{ m/s}$$

$$a_{x,B} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

$$\tau_A = \tau_B \quad (1)$$

$$w_{x,B} = 2w_{x,A} \quad (2)$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, si ottiene:

$$w_{x,A} = \cancel{w_{x0,A}} + a_{x,A} \tau_A \quad (3)$$

$$w_{x,B} = w_{x0,B} + a_{x,B} \tau_B \quad (4)$$

Sostituendo la (1) nella (3), si ottiene:

$$w_{x,A} = a_{x,A} \tau_B \quad (5)$$

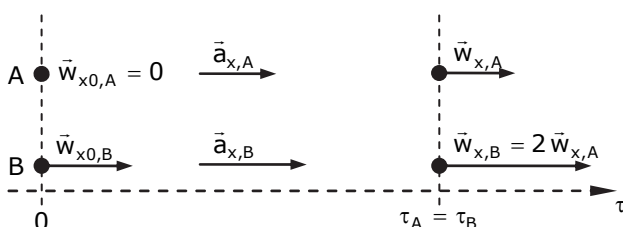
Sostituendo la (2) nella (4), si ottiene:

$$2w_{x,A} = w_{x0,B} + a_{x,B} \tau_B \quad (6)$$

Sostituendo la (5) nella (6), si ottiene il tempo impiegato dal corpo B a raggiungere una velocità doppia del corpo A:

$$2a_{x,A} \tau_B = w_{x0,B} + a_{x,B} \tau_B$$

$$\tau_B = \frac{w_{x0,B}}{2a_{x,A} - a_{x,B}} = \frac{3.5}{2 \cdot 1.8 - 2.5} = 3.2 \text{ s}$$

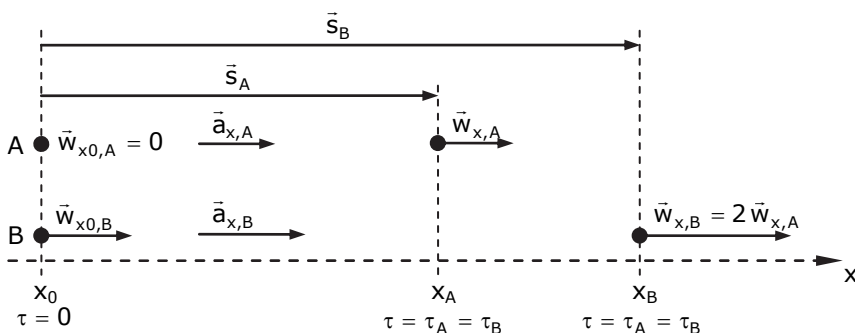


Lo spazio percorso dal corpo B vale:

$$s_B = x_B - x_{0,B} = w_{x0,B} \tau_B + \frac{1}{2} a_{x,B} \tau_B^2 = 3.5 \cdot 3.2 + 0.5 \cdot 2.5 \cdot 3.2^2 = 24 \text{ m}$$

Lo spazio percorso dal corpo A risulta:

$$s_A = x_A - x_{0,A} = \cancel{w_{x0,A} \tau_A} + \frac{1}{2} a_{x,A} \tau_A^2 = 0.5 \cdot 1.8 \cdot 3.2^2 = 9.2 \text{ m}$$



I dati relativi al secondo quesito sono i seguenti:

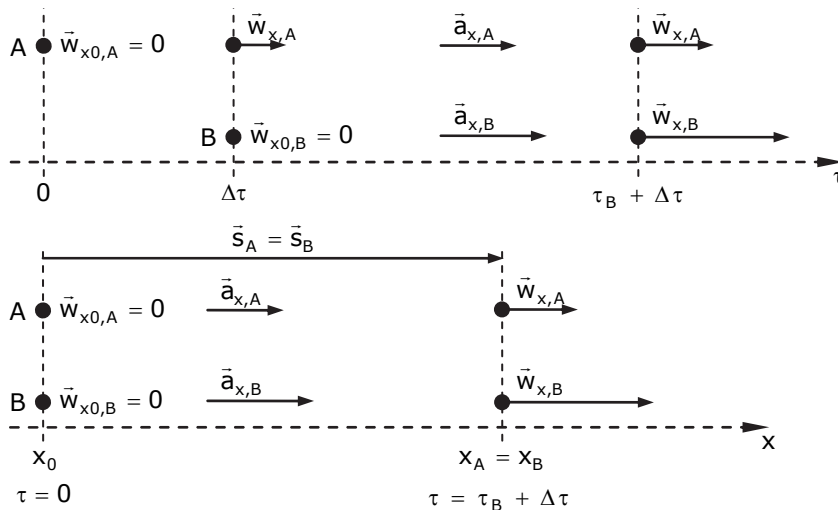
$$w_{x0,A} = w_{x0,B} = 0 \text{ m/s}$$

$$\Delta \tau = 30 \text{ s}$$

$$\tau_B = 20 \text{ s}$$

$$s_A = s_B$$

(7)



Il tempo impiegato dal corpo A ad essere raggiunto dal corpo B risulta:

$$\tau_A = \tau_B + \Delta\tau = 30 + 20 = 50 \text{ s}$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, si ottiene:

$$s_A = \cancel{w_{x0,A}\tau_A} + \frac{1}{2}a_{x,A}\tau_A^2 \quad (8)$$

$$s_B = \cancel{w_{x0,B}\tau_B} + \frac{1}{2}a_{x,B}\tau_B^2 \quad (9)$$

Ricordando la (7), si ottiene dalla (8) e dalla (9) l'accelerazione del corpo B:

$$a_{x,A}\tau_A^2 = a_{x,B}\tau_B^2$$

$$\triangleright a_{x,B} = a_{x,A} \frac{\tau_A^2}{\tau_B^2} = 1.8 \cdot \frac{50^2}{30^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Le velocità finali dei corpi risultano rispettivamente:

$$\triangleright w_{x,A} = a_{x,A}\tau_A = 1.8 \cdot 50 = 90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\triangleright w_{x,B} = a_{x,B}\tau_B = 5 \cdot 30 = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio 4

Due corpi A e B sono lanciati da terra verso l'alto, con velocità rispettivamente pari a 6 m/s e 11 m/s. Determinare:

- lo spazio percorso dal corpo A, nel tempo in cui il corpo B ha raggiunto la massima altezza,

- dopo quanto tempo la differenza di quota tra le posizioni del corpo B e del corpo A è pari a 0.8 m.

Risoluzione

$$w_{y0,A} = 6 \text{ m/s}$$

$$w_{y0,B} = 11 \text{ m/s}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Primo quesito.

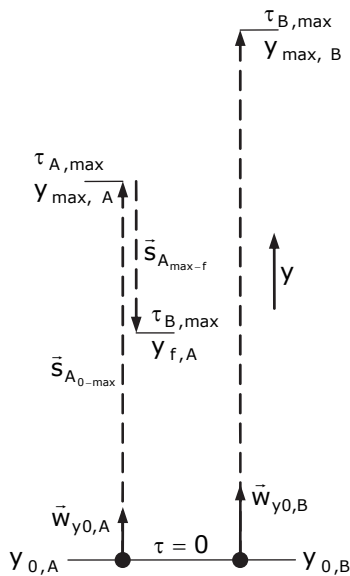
Quando i corpi raggiungono la massima altezza si ha $w_{y\max,A} = 0$ e $w_{y\max,B} = 0$. Essendo il moto rettilineo uniformemente decelerato, si ricava il tempo impiegato dai corpi A e B a raggiungere la posizione di massima altezza:

$$\cancel{w_{y\max,A}} = w_{y0,A} - g\tau_{A,\max}$$

$$\tau_{A,\max} = \frac{w_{y0,A}}{g} = \frac{6}{9.81} = 0.61 \text{ s}$$

$$\cancel{w_{y\max,B}} = w_{y0,B} - g\tau_{B,\max}$$

$$\tau_{B,\max} = \frac{w_{y0,B}}{g} = \frac{11}{9.81} = 1.12 \text{ s}$$



Lo spazio percorso dal corpo A per raggiungere da terra la posizione di massima altezza vale:

$$\begin{aligned} s_{A0-\max} &= y_{\max,A} - \cancel{y_{0,A}} = w_{y0,A}\tau_{A,\max} - \frac{1}{2}g\tau_{A,\max}^2 = \\ &= 6 \cdot 0.61 - 0.5 \cdot 9.81 \cdot 0.61^2 = 1.83 \text{ m} \end{aligned}$$

Nel restante tempo:

$$\tau = \tau_{B,\max} - \tau_{A,\max} = 1.12 - 0.61 = 0.51 \text{ s}$$

lo spazio percorso dal corpo A in discesa risulta:

$$s_{A,\max-f} = y_{\max,A} - y_{f,A} = \cancel{w_{y_{\max,A}}\tau} + \frac{1}{2}g\tau^2 = 0.5 \cdot 9.81 \cdot 0.51^2 = 1.28 \text{ m}$$

Lo spazio percorso complessivamente dal corpo A nel tempo in cui il corpo B raggiunge la posizione di massima altezza risulta:

$$\text{➤ } s_A = s_{A,0-\max} + s_{A,\max-f} = 1.83 + 1.28 = 3.11 \text{ m}$$

Il dato relativo al secondo quesito è $y_B - y_A = 0.8 \text{ m}$.

Tale condizione potrebbe verificarsi sia in salita che in discesa

In salita:

$$y_A - \cancel{y_{0,A}} = w_{y_{0,A}}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

$$y_B - \cancel{y_{0,B}} = w_{y_{0,B}}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

sottraendo membro a membro si ottiene:

$$y_B - y_A = (w_{y_{0,B}} - w_{y_{0,A}})\tau$$

$$\text{➤ } \tau = \frac{y_B - y_A}{w_{y_{0,B}} - w_{y_{0,A}}} = \frac{0.8}{11 - 6} = 0.16 \text{ s}$$

In discesa la posizione di massima altezza raggiunta dal corpo B vale:

$$y_{\max,B} - \cancel{y_{0,B}} = w_{y_{0,B}}\tau_{B,\max} - \frac{1}{2}g\tau_{B,\max}^2 = 11 \cdot 1.12 - 0.5 \cdot 9.81 \cdot 1.12^2 = 6.17 \text{ m}$$

Il corpo A ritorna al suolo dopo un tempo pari a $2\tau_{A,\max}$.

Nel tempo in cui il corpo A sale e poi ritorna al suolo, il corpo B scende per un tempo pari a:

$$\tau_B = 2\tau_{A,\max} - \tau_{B,\max} = 2 \cdot 0.61 - 1.12 = 0.1 \text{ s}$$

In tale tempo lo spazio percorso da B in discesa vale:

$$s_B = y_{\max,B} - y_B = \cancel{w_{y_{\max,B}}\tau_B} + \frac{1}{2}g\tau_B^2 = 0.5 \cdot 9.81 \cdot 0.1^2 = 0.05 \text{ m}$$

Ne segue che quando il corpo A è tornato al suolo, il corpo B si trova in discesa ad un'altezza $y_B = 6.12 \text{ m}$ ed è quindi impossibile che si realizzi la condizione richiesta.

1.2 Dinamica

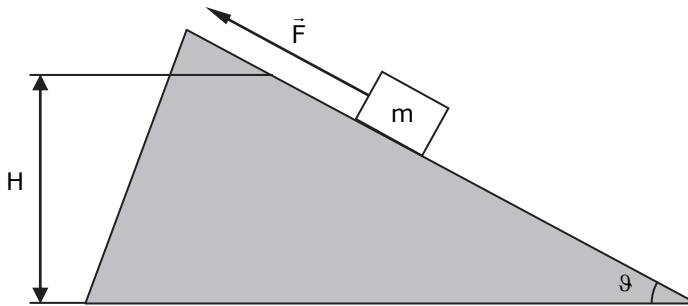
Esercizio 5

Un corpo di massa $m = 7 \text{ kg}$ sale lungo un piano inclinato di $\vartheta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale, trascinato da una forza costante di modulo $F = 60 \text{ N}$ diretta come in figura.

Nell'ipotesi che il piano sia liscio, determinare:

- l'accelerazione del corpo (modulo, direzione e verso),

- la velocità con cui il corpo raggiunge la quota $H = 3 \text{ m}$, sapendo che la sua velocità alla base del piano inclinato è nulla,
 - il tempo impiegato a colmare il dislivello H .
- Nell'ipotesi che il piano sia scabro, determinare:
- il coefficiente d'attrito dinamico tale per cui il corpo sale lungo il piano inclinato con velocità costante.



Risoluzione

$$m = 7 \text{ kg}$$

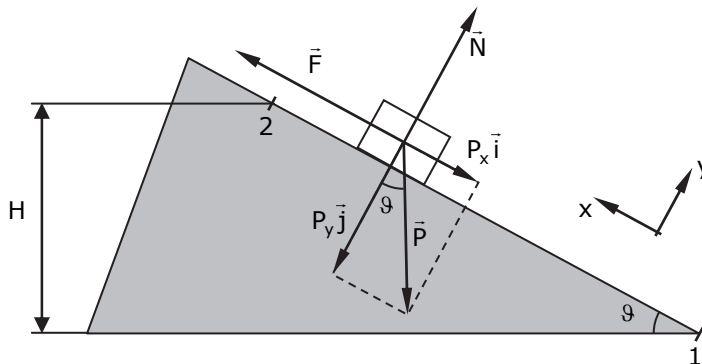
$$\vartheta = 45^\circ$$

$$F = 60 \text{ N}$$

$$H = 3 \text{ m}$$

Nell'ipotesi di piano liscio la seconda legge della dinamica in termini vettoriali risulta:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$



In direzione x si ha:

$$F_x + P_x = ma_x$$

$$F - P \sin \vartheta = ma_x$$

$$F - mg \sin \vartheta = ma_x$$

$$\text{➤ } a_x = \frac{F - mgs \sin \vartheta}{m} = \frac{60 - 7 \cdot 9.81 \cdot \sin 45^\circ}{7} = 1.63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Pertanto il vettore accelerazione risulta:

modulo: $a = 1.63 \text{ m/s}^2$

direzione: quella del piano inclinato

verso: in salita

Lo spazio percorso da 1 a 2 vale:

$$s = \frac{H}{\sin \vartheta} = \frac{3}{\sin 45^\circ} = 4.24 \text{ m}$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato e considerando che alla base del piano inclinato il corpo è fermo, si può calcolare la velocità con cui il corpo raggiunge la quota H:

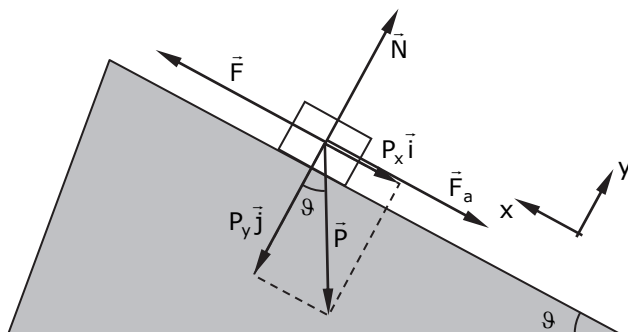
$$w_{x,2}^2 = \cancel{w_{x,1}^2} + 2a_x s$$

$$\text{➤ } w_{x,2} = \sqrt{2a_x s} = \sqrt{2 \cdot 1.63 \cdot 4.24} = 3.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il tempo impiegato vale:

$$w_{x,2} = \cancel{w_{x,1}} + a_x \tau$$

$$\text{➤ } \tau = \frac{w_{x,2}}{a_x} = \frac{3.72}{1.63} = 2.3 \text{ s}$$



Essendo il moto rettilineo uniforme ($\vec{w} = \text{costante}, \vec{a} = 0$) ed il piano scabro, la seconda legge della dinamica in termini vettoriali risulta:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = 0$$

Nelle direzioni x e y si ha:

$$\begin{cases} F_x + P_x + F_{ax} = 0 \\ N_y + P_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - P \sin \vartheta - F_a = 0 \\ N - P \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

Ricordando che $F_a = \mu_c N$ e $P = mg$, si ha:

$$\begin{cases} F - mg \sin \vartheta - \mu_c N = 0 & (1) \\ N - mg \cos \vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene il coefficiente di attrito:

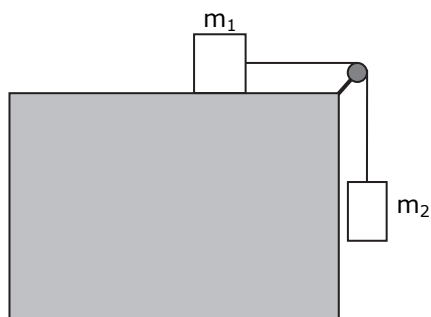
$$F - mg \sin \vartheta - \mu_c mg \cos \vartheta = 0$$

$$\Rightarrow \mu_c = \frac{F - mg \sin \vartheta}{mg \cos \vartheta} = \frac{60 - 7 \cdot 9.81 \cdot \sin 45^\circ}{7 \cdot 9.81 \cdot \cos 45^\circ} = 0.24$$

Esercizio 6

Due oggetti di massa $m_1 = 10 \text{ kg}$ ed $m_2 = 15 \text{ kg}$ sono collegati mediante un filo sottile (privo di massa). La massa m_1 è posta su una superficie orizzontale con un coefficiente di attrito dinamico pari a 0.4, la massa m_2 è sospesa mediante una carrucola (priva di attrito), così come rappresentato in figura. Sapendo che all'istante iniziale le due masse sono ferme, determinare:

- l'accelerazione della massa m_1 ,
- la tensione della fune,
- lo spazio percorso dalla massa m_2 in 0.8 s,
- il coefficiente d'attrito statico tale per cui la massa m_1 rimane ferma.



Risoluzione

$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 15 \text{ kg}$$

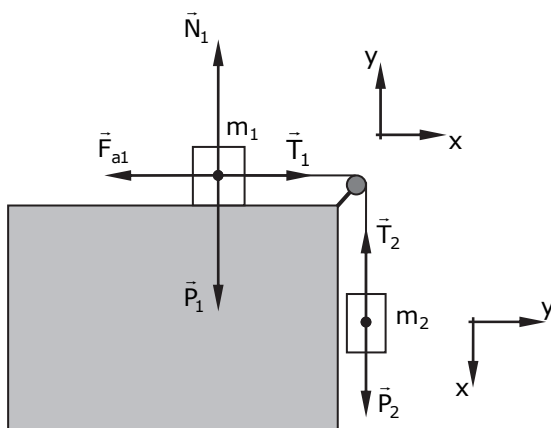
$$\mu_c = 0.4$$

$$\tau = 0.8 \text{ s}$$

La seconda legge della dinamica, applicata separatamente alle masse m_1 e m_2 , risulta in termini vettoriali:

$$\text{massa } m_1 \quad \vec{F}_{a1} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$\text{massa } m_2 \quad \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2$$



Ipotizzando che il filo sia teso, si ha:

$$T_1 = T_2 = T$$

$$a_1 = a_2 = a$$

Nelle direzioni x e y si ottiene:

$$\begin{cases} T - F_{a1} = m_1 a \\ N_1 - P_1 = 0 \\ P_2 - T = m_2 a \end{cases}$$

Ricordando che $F_a = \mu_c N$ e $P = mg$, si ha:

$$\begin{cases} T - \mu_c N_1 = m_1 a \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} N_1 - m_1 g = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$\begin{cases} T - \mu_c m_1 g = m_1 a \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \quad (4)$$

Sostituendo la (4) nella (3) si ottiene:

$$m_2 g - m_2 a - \mu_c m_1 g = m_1 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - \mu_c m_1)g}{m_1 + m_2} = \frac{(15 - 0.4 \cdot 10)}{10 + 15} = 4.32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dalla (3) si ottiene:

$$\Rightarrow T = (\mu_c g + a)m_1 = (0.4 \cdot 9.81 + 4.32) \cdot 10 = 82.4 \text{ N}$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, si ha:

$$\Rightarrow s = \cancel{v_0 \tau} + \frac{1}{2} a \tau^2 = 0.5 \cdot 4.32 \cdot 0.8^2 = 1.38 \text{ m}$$

Se le masse m_1 e m_2 rimangono ferme, si ha:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = 0$$

Ne segue che:

$$\text{massa } m_1 \quad \vec{F}_{a1} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = 0$$

$$\text{massa } m_2 \quad \vec{T}_2 + \vec{P}_2 = 0$$

$$\begin{cases} T - F_{a1} = 0 \\ N_1 - P_1 = 0 \\ P_2 - T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} T - \mu_s N_1 = 0 \\ N_1 - m_1 g = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m_2 g - T = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Sostituendo la (6) e la (7) nella (5), si ricava il coefficiente d'attrito statico limite:

$$m_2 g - \mu_s m_1 g = 0$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{m_2}{m_1} = \frac{15}{10} = 1.5$$

Quindi, affinché la massa m_1 sia ferma, deve essere: $\mu_s \geq 1.5$

Esercizio 7

Un corpo di massa pari a 12 kg si muove di moto circolare uniforme appoggiato alle pareti di una centrifuga, di diametro pari a 2.7 m, che ruota a 30 giri/minuto, senza che vi sia moto relativo tra la centrifuga e il corpo stesso, così come rappresentato in figura. La molla a cui è incernierato il corpo ha una costante elastica pari a 15 N/cm e risulta compressa di 5 cm. Determinare:

- l'accelerazione del corpo e il fattore di attrito tra la parete e il corpo affinché quest'ultimo non cada,
- la frequenza di rotazione che dovrebbe avere la centrifuga per mantenere il corpo nella stessa posizione in assenza della molla, considerando che il fattore d'attrito abbia il valore appena calcolato.

Risoluzione

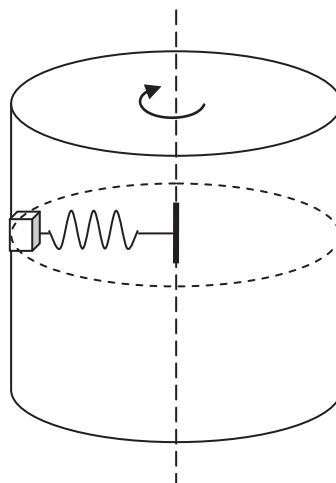
$$m_1 = 12 \text{ kg}$$

$$D = 2.7 \text{ m}$$

$$f = 30 \text{ min}^{-1} = 0.5 \text{ Hz}$$

$$k = 15 \text{ N/cm} = 1500 \text{ N/m}$$

$$x = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$



La velocità angolare di rotazione della centrifuga vale:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 0.5 = 3.14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

L'accelerazione centripeta del corpo vale:

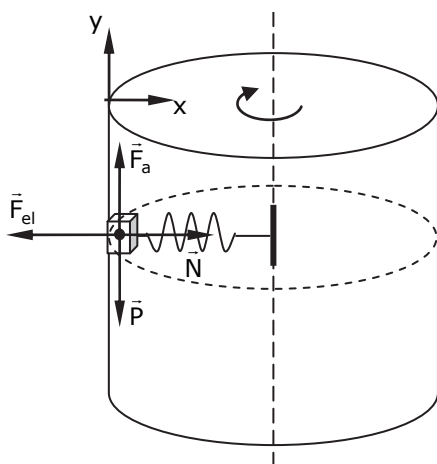
$$\text{➤ } a = \omega^2 R = \frac{\omega^2 D}{2} = \frac{3.14^2 \cdot 2.7}{2} = 13.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La seconda legge della dinamica, applicata alla massa m_1 , risulta in termini vettoriali:

$$\vec{F}_a + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Nelle direzioni x e y si ottiene:

$$\begin{cases} N - F_{el} = ma \\ F_a - P = 0 \end{cases}$$



Ricordando che $F_a = \mu_s N$, $F_{el} = kx$ e $P = mg$, si ha:

$$\begin{cases} N = ma + kx & (1) \\ \mu_s N - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

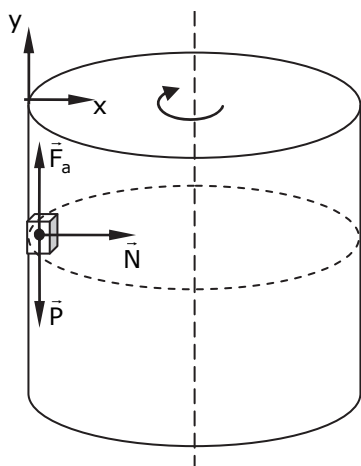
Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene il coefficiente d'attrito statico limite tra la parete della centrifuga e il corpo:

$$\text{➤ } \mu_s = \frac{mg}{N} = \frac{mg}{ma + kx} = \frac{12 \cdot 9.81}{12 \cdot 13.3 + 1500 \cdot 0.05} = 0.5$$

Quindi, affinché il corpo non cada, deve essere: $\mu_s \geq 0.5$

In assenza della molla, applicando la seconda legge della dinamica, si può determinare l'accelerazione centripeta del corpo:

$$\vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$



$$\begin{cases} N = ma \\ F_a - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = ma \\ \mu_s N - mg = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{N}{m} = \frac{mg}{\mu_s m} = \frac{g}{\mu} = \frac{9.81}{0.5} = 19.62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La velocità angolare di rotazione della centrifuga vale:

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{2a}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 19.62}{2.7}} = 3.81 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La corrispondente frequenza di rotazione vale:

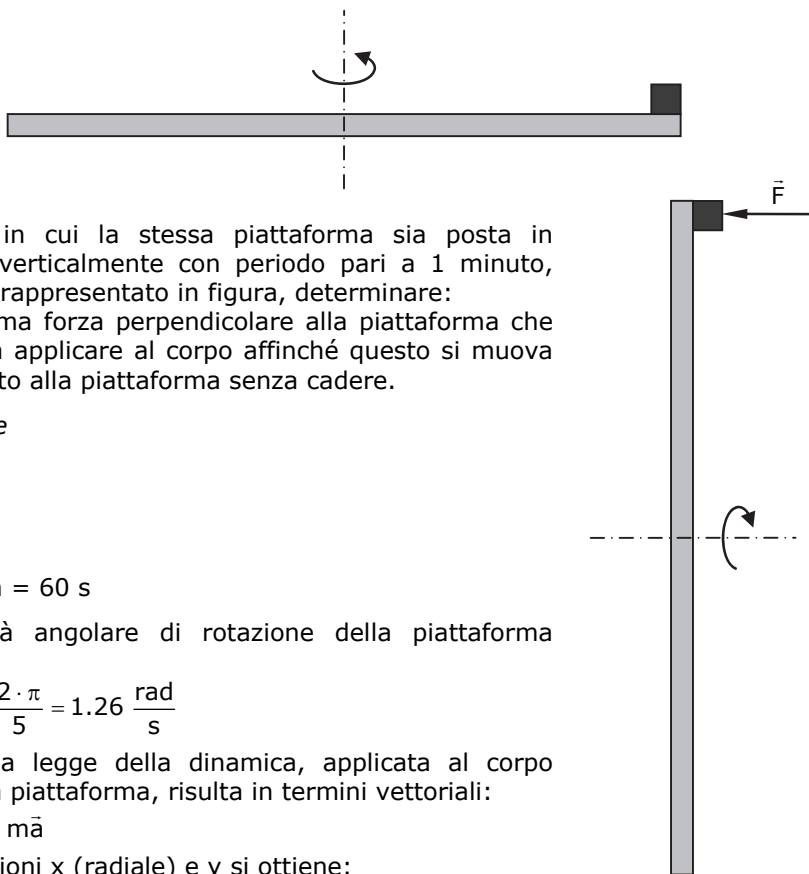
$$\text{➤ } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3.82}{2 \cdot \pi} = 0.61 \text{ Hz} = 36.6 \text{ min}^{-1}$$

Quindi, affinché il corpo non cada in assenza della molla, deve essere:
 $f \geq 36.6 \text{ min}^{-1}$.

Esercizio 8

Una piattaforma circolare orizzontale si muove di moto circolare uniforme compiendo un giro completo in 5 secondi, così come rappresentato in figura. Sul bordo della piattaforma è posato un corpo di massa pari a 20 kg. Sapendo che il fattore d'attrito statico è pari a 1.5, determinare nella condizione limite di assenza di moto relativo tra il corpo e la piattaforma:

- la velocità angolare e l'accelerazione radiale del corpo,
 - il diametro della piattaforma e la velocità tangenziale del corpo,
- Sapendo che la velocità angolare della piattaforma raddoppia in 7 secondi, determinare:
- l'accelerazione angolare (supposta costante) e lo spostamento angolare effettuato dalla piattaforma in tale intervallo di tempo.



Nel caso in cui la stessa piattaforma sia posta in rotazione verticalmente con periodo pari a 1 minuto, così come rappresentato in figura, determinare:

- la minima forza perpendicolare alla piattaforma che bisogna applicare al corpo affinché questo si muova attaccato alla piattaforma senza cadere.

Risoluzione

$$T_1 = 5 \text{ s}$$

$$m = 20 \text{ kg}$$

$$\mu_s = 1.5$$

$$\Delta\tau = 7 \text{ s}$$

$$T_3 = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

La velocità angolare di rotazione della piattaforma risulta:

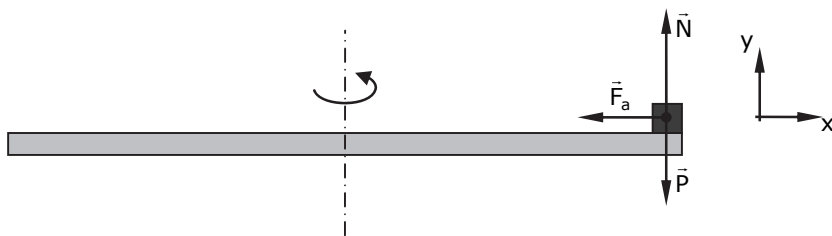
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi}{5} = 1.26 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La seconda legge della dinamica, applicata al corpo posto sulla piattaforma, risulta in termini vettoriali:

$$\vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Nelle direzioni x (radiale) e y si ottiene:

$$\begin{cases} -F_a = ma_x \\ N - P = 0 \end{cases}$$



Ricordando che $F_a = \mu_s N$ e $P = mg$, si ha:

$$\begin{cases} -\mu_s N = ma_x \\ N - mg = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene il valore dell'accelerazione centripeta a cui è sottoposto il corpo:

$$\text{➤ } a_x = -\mu_s g = -1.5 \cdot 9.81 = -14.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ovvero l'accelerazione risulta radiale diretta verso il centro di rotazione con modulo $a_1 = 14.7 \text{ m/s}^2$.

Il diametro della piattaforma vale:

$$\text{➤ } D = \frac{2a_1}{\omega_1^2} = \frac{2 \cdot 14.7}{1.26^2} = 18.5 \text{ m}$$

La velocità tangenziale del corpo vale:

$$\text{➤ } w_1 = \omega_1 \frac{D}{2} = 1.26 \cdot \frac{18.5}{2} = 11.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se la velocità di rotazione della giostra raddoppia, risulta:

$$\omega_2 = 2\omega_1 = 2 \cdot 1.26 = 2.52 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

L'accelerazione angolare (supposta costante) vale:

$$\text{➤ } \alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta\tau} = \frac{2.52 - 1.26}{7} = 0.18 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

La velocità angolare media nella fase di accelerazione risulta quindi:

$$\omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \frac{2.52 + 1.26}{2} = 1.89 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Lo spostamento angolare della piattaforma risulta:

$$\text{➤ } \Delta\theta = \omega_m \Delta\tau = 1.89 \cdot 7 = 13.23 \text{ rad}$$

ovvero compie poco più di due giri.

La velocità angolare di rotazione della piattaforma verticale risulta:

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = \frac{2 \cdot \pi}{60} = 0.105 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

L'accelerazione centripeta corrispondente vale:

$$a_3 = \omega_3^2 \frac{D}{2} = 0.105^2 \cdot \frac{18.5}{2} = 0.10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

La seconda legge della dinamica, applicata al corpo posto sulla piattaforma nelle posizioni A,B,C risulta in termini vettoriali:

$$\vec{F}_a + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

In direzione x per tutte e tre le posizioni si ottiene nella condizione limite:

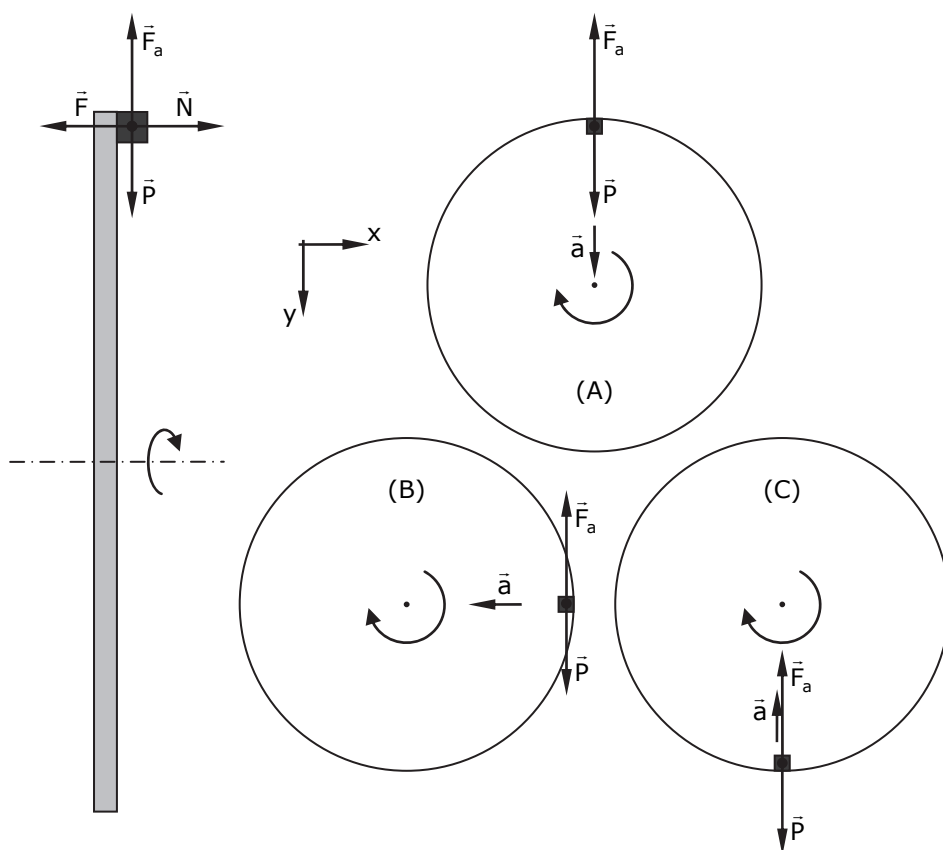
$$N - F = 0 \quad (3)$$

In direzione y si ottiene nelle 3 posizioni:

$$\text{A) } P - F_a = ma_3 \quad (4)$$

$$\text{B) } P - F_a = 0 \quad (5)$$

$$\text{C) } P - F_a = -ma_3 \quad (6)$$



Ricordando che $F_a = \mu_s N$ e $P = mg$, si ha sostituendo le (4), (5) e (6) nella (3):

$$\text{A) } mg - \mu_s F = ma_3 \quad F = \frac{mg - ma_3}{\mu_s}$$

$$\text{B) } mg - \mu_s F = 0 \quad F = \frac{mg}{\mu_s}$$

$$\text{C) } mg - \mu_s F = -ma_3 \quad F = \frac{mg + ma_3}{\mu_s}$$

La forza più elevata è quella nella posizione C, per cui la minima forza da applicare perché il corpo ruoti attaccato alla piattaforma durante l'intera rotazione vale:

$$\text{➤ } F = \frac{m(g + a_3)}{\mu_s} = \frac{20 \cdot (9.81 + 0.10)}{1.5} = 132 \text{ N}$$

1.3 Lavoro - energia

Esercizio 9

Un corpo di massa 3.7 kg scivola su una guida curvilinea priva di attrito fino al punto C e poi risale lungo un piano con attrito, inclinato di 30° rispetto all'orizzontale, fino al punto D così come rappresentato in figura.

Sapendo che il corpo nel punto iniziale A si trova ad un'altezza di 9 m e possiede una velocità nulla e che il fattore di attrito del piano inclinato è pari a 0.5, si vuole determinare:

- la velocità del corpo nel punto B e la lunghezza del tratto BC, sapendo che quest'ultimo viene percorso dal corpo in 2.4 s,
- l'accelerazione del corpo nel tratto CD (modulo, direzione e verso),
- l'altezza massima a cui arriva il corpo quando risale lungo il tratto CD,
- l'energia dissipata per attrito durante il moto sul piano inclinato.



Risoluzione

$$m = 3.7 \text{ kg}$$

$$w_A = 0 \text{ m/s}$$

$$H_A = 9 \text{ m}$$

$$\Delta t_{BC} = 2.4 \text{ s}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\mu_c = 0.5$$

$$w_D = 0 \text{ m/s}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica al tratto AB e assumendo come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale la quota $H_B = 0$, si ottiene:

$$E_{T,A} = E_{T,B}$$

$$\frac{1}{2}mw_A^2 + mgH_A = \frac{1}{2}mw_B^2 + mgH_B$$

$$\Rightarrow w_B = \sqrt{2gH_A} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 9} = 13.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

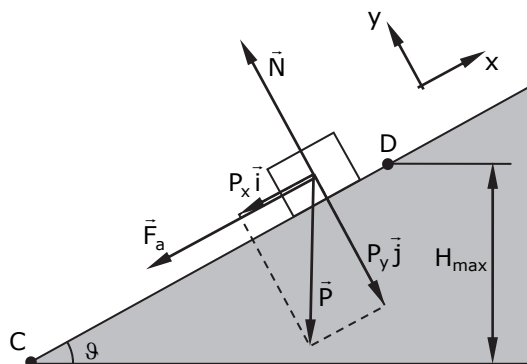
Nel tratto BC il moto risulta rettilineo uniforme:

$$w_C = w_B$$

$$\triangleright \overline{BC} = w_C \Delta\tau_{BC} = 13.3 \cdot 2.4 = 31.92 \text{ m}$$

Nel tratto CD la seconda legge della dinamica in termini vettoriali risulta:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$



Nelle direzioni x e y si ha:

$$\begin{cases} P_x + F_{ax} = ma_x \\ N_y + P_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -P \sin \vartheta - F_a = ma_x \\ N - P \cos \vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mg \sin \vartheta - \mu_c N = ma_x & (1) \\ N - mg \cos \vartheta = 0 & (2) \end{cases}$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$-mg \sin \vartheta - \mu_c mg \cos \vartheta = ma_x$$

$$\triangleright a_x = -g(\sin \vartheta + \mu_c \cos \vartheta) = -9.81 \cdot (\sin 30^\circ + 0.5 \cdot \cos 30^\circ) = -9.15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Risulta dunque $a = 9.15 \text{ m/s}^2$, diretta lungo il piano inclinato verso il basso.

Essendo nel tratto CD il moto rettilineo uniformemente accelerato, si ha:

$$\cancel{w_D^2} = w_C^2 + 2a_x \overline{CD}$$

$$\overline{CD} = -\frac{w_C^2}{2a_x} = \frac{13.3^2}{2 \cdot 9.15} = 9.67 \text{ m}$$

$$\triangleright H_{\max} = H_D = \overline{CD} \sin \vartheta = 9.67 \cdot \sin 30^\circ = 4.84 \text{ m}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica al tratto CD e assumendo come riferimento per l'energia potenziale gravitazionale la quota $H_C = 0$, si ottiene:

$$E_{T,C} = E_{T,D} + E_{\text{diss},CD}$$

$$\frac{1}{2}mw_C^2 + \cancel{mgH_C} = \frac{1}{2}\cancel{mw_D^2} + mgH_D + E_{\text{diss,CD}}$$

$$\text{➤ } E_{\text{diss,CD}} = \frac{1}{2}mw_C^2 - mgH_D = \frac{1}{2} \cdot 3.7 \cdot 13.3^2 - 3.7 \cdot 9.81 \cdot 4.84 = 151.6 \text{ J}$$

L'energia dissipata nel tratto CD può essere determinata anche mediante la seguente relazione:

$$E_{\text{diss,CD}} = -L_{a,\text{CD}} = -(\vec{F}_a \cdot \vec{CD}) = F_a \overline{CD} \quad (3)$$

La forza d'attrito agente sul corpo nel tratto CD risulta:

$$F_a = \mu_c N = \mu_c mg \cos \vartheta = 0.5 \cdot 3.7 \cdot 9.81 \cdot \cos 30^\circ = 15.7 \text{ N}$$

Ne segue dalla (3):

$$E_{\text{diss,CD}} = 15.7 \cdot 9.67 = 151.8 \text{ J}$$

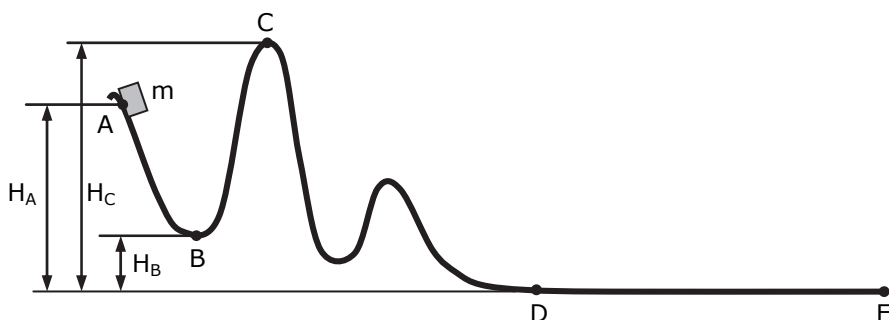
Esercizio 10

Il carrello di una "montagna russa" passa per il punto A con una velocità di 8 m/s, per il punto B con una velocità di 15 m/s ed arriva in D con una velocità di 20 m/s. Sapendo che $H_C - H_B = 10 \text{ m}$ ed ipotizzando che la guida su cui scorre il carrello sia priva di attrito tra A e D, determinare:

- la velocità del carrello in C,
- le quote H_A e H_B .

Volendo fermare il carrello nel punto E in un tempo pari a 3 secondi da quando passa per D, determinare:

- la lunghezza del tratto DE,
- il coefficiente d'attrito del tratto DE.



Risoluzione

$$w_A = 8 \text{ m/s}$$

$$w_B = 15 \text{ m/s}$$

$$w_D = 20 \text{ m/s}$$

$$H_C - H_B = 10 \text{ m}$$

$$\Delta\tau_{DE} = 3 \text{ s}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra B e C, si ottiene:

$$E_{T,B} = E_{T,C}$$

$$\frac{1}{2}mw_B^2 + mgH_B = \frac{1}{2}mw_C^2 + mgH_C$$

$$\text{➤ } w_C = \sqrt{w_B^2 - 2g(H_C - H_B)} = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 9.81 \cdot 10} = 5.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra A e D, si ottiene:

$$E_{T,A} = E_{T,D}$$

$$\frac{1}{2}mw_A^2 + mgH_A = \frac{1}{2}mw_D^2 + mgH_D$$

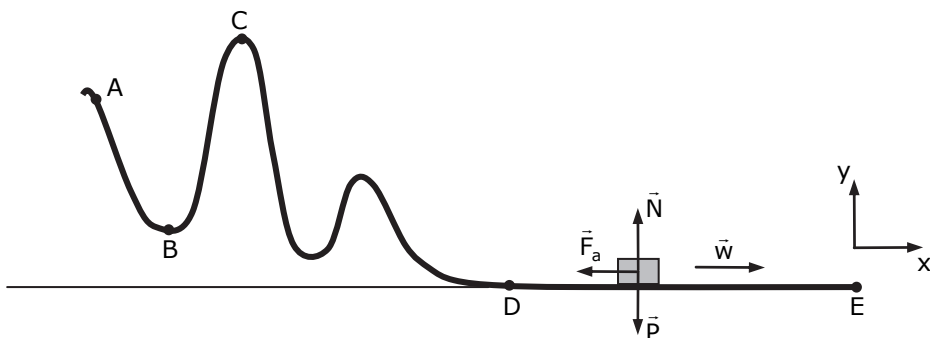
$$\text{➤ } H_A = \frac{w_D^2 - w_A^2}{2g} = \frac{20^2 - 8^2}{2 \cdot 9.81} = 17.1 \text{ m}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra A e B, si ottiene:

$$E_{T,A} = E_{T,B}$$

$$\frac{1}{2}mw_A^2 + mgH_A = \frac{1}{2}mw_B^2 + mgH_B$$

$$\text{➤ } H_B = H_A - \frac{w_B^2 - w_A^2}{2g} = 17.1 - \frac{15^2 - 8^2}{2 \cdot 9.81} = 8.9 \text{ m}$$



Nel tratto DE il moto risulta rettilineo uniformemente accelerato per cui si ha:

$$w_E = w_D + a_x \Delta \tau_{DE}$$

$$a_x = -\frac{w_D}{\Delta \tau_{DE}} = -\frac{20}{3} = -6.7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$w_E^2 = w_D^2 + 2a_x \overline{DE}$$

$$\text{➤ } \overline{DE} = -\frac{w_D^2}{2a_x} = \frac{20^2}{2 \cdot 6.7} = 29.9 \text{ m}$$

Applicando la seconda legge della dinamica nel tratto DE, si ricava:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} -F_a = ma_x \\ N - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu_a N = ma_x \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

$$-\mu_a mg = ma_x$$

$$\Rightarrow \mu_a = -\frac{a_x}{g} = \frac{6.7}{9.81} = 0.68$$

Esercizio 11

Una molla ideale, avente costante elastica 500 N/m, è posta in fondo a un piano liscio inclinato di 45° sull'orizzontale. Un oggetto di massa 0.5 kg parte da fermo in cima al piano inclinato e arriva a comprimere la molla di 25 cm fermandosi. Determinare:

- lo spostamento dell'oggetto da quando parte a quando si ferma,
- la velocità dell'oggetto nell'istante in cui entra in contatto con la molla.

Considerando il piano scabro, determinare:

- l'energia dissipata per attrito, ipotizzando una compressione della molla pari a 6 cm quando il corpo si è arrestato.

Risoluzione

$$k = 500 \text{ N/m}$$

$$x = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

$$\vartheta = 45^\circ$$

$$m = 0.5 \text{ kg}$$

$$w_1 = 0 \text{ m/s}$$

$$w_3 = 0 \text{ m/s}$$

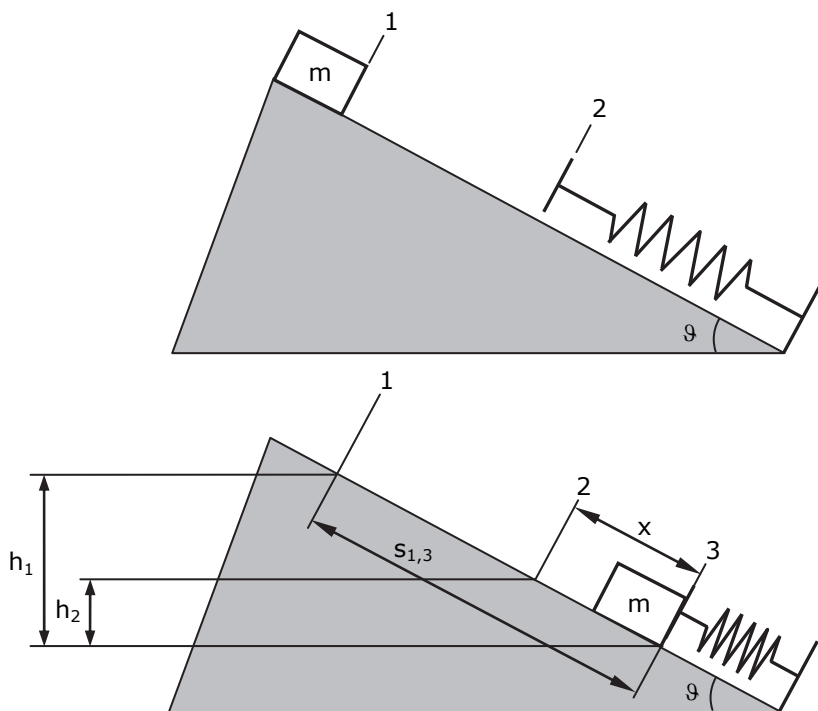
Assumendo la quota di riferimento per la valutazione dell'energia potenziale così come rappresentato in figura, l'energia totale nelle tre posizioni evidenziate vale:

$$E_{T,1} = E_{p,1} = mgh_1$$

$$E_{T,2} = E_{c,2} + E_{p,2} = \frac{1}{2}mw_2^2 + mgh_2$$

$$E_{T,3} = E_{p,3} = \frac{1}{2}kx^2$$

Dal momento che la dinamica tratta i corpi come puntiformi, è indifferente porre il riferimento nel baricentro o sul bordo del corpo. Quest'ultima schematizzazione è stata scelta per meglio evidenziare la compressione della molla. Quando si considera il corpo con dimensioni finite il riferimento deve essere nel centro di massa.



Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica nel caso di campo di forze conservativo nel tratto 1-3, si ottiene:

$$E_{T,1} = E_{T,3}$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2} kx^2$$

L'altezza da cui parte l'oggetto vale dunque:

$$h_1 = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{500 \cdot 0.25^2}{2 \cdot 0.5 \cdot 9.81} = 3.19 \text{ m}$$

Lo spostamento dell'oggetto risulta:

$$\text{➤ } s_{1,3} = \frac{h_1}{\sin \theta} = \frac{3.19}{\sin 45^\circ} = 4.51 \text{ m}$$

L'altezza del punto in cui l'oggetto viene a contatto con la molla vale:

$$h_2 = x \sin \theta = 0.25 \cdot \sin 45^\circ = 0.18 \text{ m}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica nel caso di campo di forze conservativo nel tratto 1-2, si ottiene:

$$E_{T,1} = E_{T,2}$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2} mw_2^2 + mgh_2$$

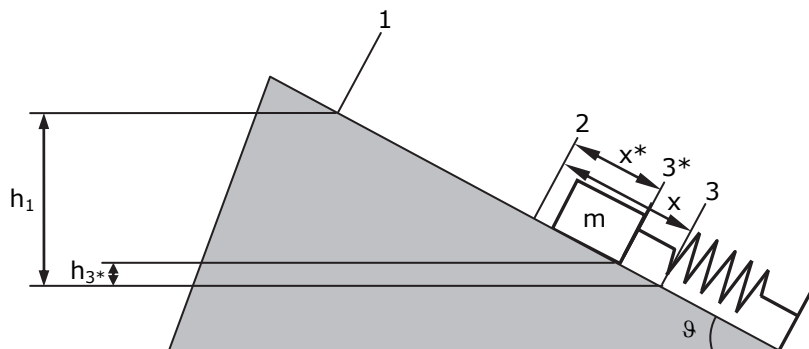
La velocità dell'oggetto nell'istante in cui viene a contatto con la molla risulta:

$$\rightarrow w_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot (3.19 - 0.18)} = 7.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nel caso di piano scabro si ha:

$$x^* = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$$

$$w_{3^*} = 0 \text{ m/s}$$



L'energia totale nella posizione 3* quando il corpo si ferma vale:

$$E_{T,3^*} = E_{p,3} = mgh_{3^*} + \frac{1}{2}kx^{*2}$$

essendo:

$$h_{3^*} = (x - x^*) \sin \theta = (0.25 - 0.06) \cdot \sin 45^\circ = 0.13 \text{ m}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica nel caso di campo di forze non conservativo nel tratto 1-3*, si ottiene:

$$E_{T,1} = E_{T,3^*} + E_{diss,13^*}$$

$$mgh_1 = mgh_{3^*} + \frac{1}{2}kx^{*2} + E_{diss,13^*}$$

L'energia dissipata per attrito nel tratto 1-3* vale dunque:

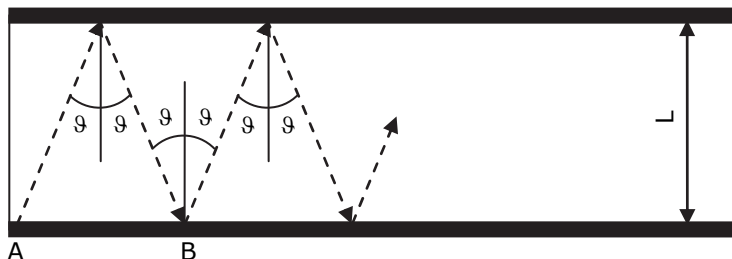
$$\rightarrow E_{diss,13^*} = mg(h_1 - h_{3^*}) - \frac{1}{2}kx^{*2} = 0.5 \cdot 9.81 \cdot (3.19 - 0.13) - \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0.06^2 = 14.1 \text{ J}$$

Esercizio 12

Un corpo di massa pari a 100 g si muove su un piano orizzontale tra due sponde distanti 1.2 m secondo la traiettoria rappresentata in figura. Sapendo che ad ogni urto l'angolo θ tra la traiettoria e la normale alla sponda è costante e pari a 30° , che nell'urto non si ha dissipazione di energia (urto elastico), che il coefficiente d'attrito tra il piano e il corpo è pari 0.35 e che il corpo parte dal punto A con una velocità di 10 m/s, determinare:

- l'accelerazione del corpo,
- la velocità del corpo nel punto B,
- il numero di urti subiti dal corpo prima di fermarsi e l'energia dissipata per attrito,

- il numero di urti subiti dal corpo prima di fermarsi, ipotizzando che ad ogni urto (urto anelastico) l'energia cinetica dissipata sia pari al 20% di quella posseduta dal corpo prima dell'urto .



Risoluzione

$$m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$$

$$w_A = 10 \text{ m/s}$$

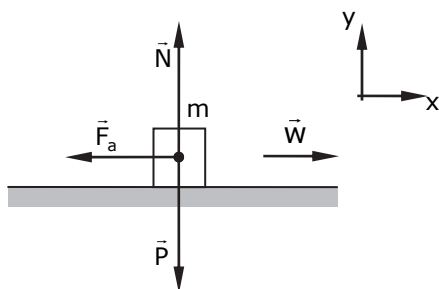
$$\vartheta = 30^\circ$$

$$\mu_c = 0.35$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$

Nel tratto percorso dal corpo tra le due sponde si applica la seconda legge della dinamica in termini vettoriali:

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$



Nelle direzioni x e y si ha:

$$\begin{cases} -F_a = ma_x \\ N - P = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu_c N = ma_x \\ N = mg \end{cases}$$

Ne segue che:

$$\Rightarrow a_x = -\mu_c g = -0.35 \cdot 9.81 = -3.43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Si tratta quindi di decelerazione con modulo $a = 3.43 \text{ m/s}^2$.

Lo spazio percorso dal corpo tra due urti successivi risulta:

$$s = \frac{L}{\cos \vartheta} = \frac{1.2}{\cos 30^\circ} = 1.39 \text{ m}$$

Lo spazio percorso dal corpo tra A e B vale:

$$s_{AB} = 2s = 2 \cdot 1.39 = 2.78 \text{ m}$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, si determina la velocità del corpo nel punto B:

$$\text{➤ } w_B = \sqrt{w_A^2 + 2a_x s_{AB}} = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 3.43 \cdot 2.78} = 9.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Applicando le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato, si determina lo spazio s^* percorso dal corpo una volta fermo:

$$0 = w_A^2 + 2a_x s^*$$

$$s^* = -\frac{w_A^2}{2a_x} = \frac{10^2}{2 \cdot 3.43} = 14.58 \text{ m}$$

Essendo:

$$\frac{s^*}{s} = \frac{14.58}{1.39} = 10.5$$

- il numero di urti prima di fermarsi vale $n = 10$.

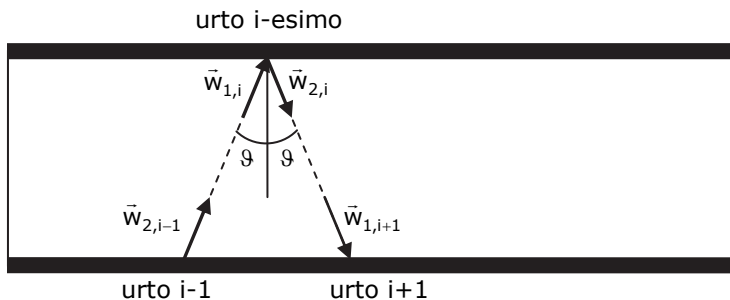
L'intera energia cinetica posseduta inizialmente dal corpo viene dissipata in attrito sul piano, per cui risulta:

$$\text{➤ } E_{\text{diss}} = E_{T,A} = \frac{1}{2} m w_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 10^2 = 5 \text{ J}$$

Nel caso di urti anelastici, considerando l'urto i -esimo rappresentato in figura, la velocità $w_{1,i}$ del corpo immediatamente prima dell'urto vale:

$$w_{1,i} = \sqrt{w_{2,i-1}^2 + 2a_x s}$$

essendo $w_{2,i-1}$ la velocità del corpo immediatamente dopo l'urto $i-1$ precedente.



L'energia cinetica del corpo prima dell'urto risulta:

$$E_{c,1,i} = \frac{1}{2} m w_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m (w_{2,i-1}^2 + 2a_x s)$$

L'energia cinetica del corpo dopo l'urto, considerando una dissipazione del 20% dell'energia cinetica posseduta prima dell'urto, risulta:

$$E_{c,2,i} = 0.8 E_{c,1,i}$$

$$E_{c,2,i} = \frac{1}{2} m w_{2,i}^2 = 0.8 \cdot \frac{1}{2} m (w_{2,i-1}^2 + 2 a_x s)$$

essendo $w_{2,i}$ la velocità del corpo immediatamente dopo l'urto i-esimo:

$$w_{2,i} = \sqrt{0.8 (w_{2,i-1}^2 + 2 a_x s)}$$

I calcoli a partire dal punto A sono riportati nella seguente tabella.

urto i	$w_{2,i}$ [m/s]
0	10
1	8.51
2	7.09
3	5.71
4	4.30
5	2.68

Dopo il quinto urto il corpo si ferma, in quanto non possiede più l'energia tale da raggiungere la sponda successiva. Infatti lo spazio percorso dal corpo prima di fermarsi dopo il quinto urto vale:

$$s' = -\frac{w_{2,5}^2}{2a_x} = \frac{2.68^2}{2 \cdot 3.43} = 1.05 \text{ m}$$

inferiore agli 1.39 m da percorrere prima di compiere il sesto urto.

➤ Ne segue che il numero di urti prima di fermarsi risulta $n = 5$.

1.4 Statica dei fluidi

Esercizio 13

Un blocco cubico di legno d'abete ben essiccato ($\rho_l = 465 \text{ kg/m}^3$) di lato 40 cm è posto sul fondo di una piscina vuota di dimensioni in pianta $5 \times 4 \text{ m}$ e profondità 2 m. Viene quindi aperto un rubinetto che scarica nella piscina una portata d'acqua pari a $35 \text{ m}^3/\text{h}$. Determinare:

- il livello dell'acqua nella piscina per cui il blocco di legno si stacca dal fondo e la percentuale del volume del blocco di legno che rimane fuori dall'acqua,
- il tempo necessario per riempire la piscina, trascurando la presenza del blocco di legno, e la pressione esercitata dall'acqua sul fondo della vasca una volta riempita.

Risoluzione

$$L = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$$

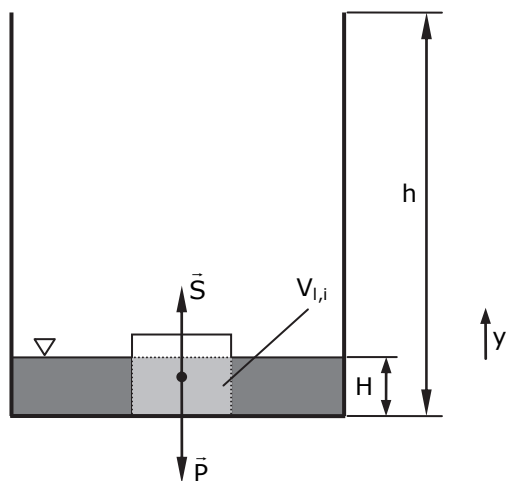
$$h = 2 \text{ m}$$

$$V = 5 \times 4 \times 2 = 40 \text{ m}^3$$

$$\rho_l = 465 \text{ kg/m}^3$$

$$q_v = 35 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0097 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il corpo si stacca dal fondo della piscina nel momento in cui l'acqua nella piscina raggiunge un livello H tale per cui la spinta di Archimede agente sul blocco equilibra il peso del blocco stesso.



Dalla seconda legge della dinamica si ha:

$$\vec{S} + \vec{P} = 0$$

In direzione y si ha:

$$S_y + P_y = 0$$

$$S - P = 0 \quad (1)$$

Il modulo della forza peso risulta:

$$P = \rho_l V_l g = \rho_l L^3 g \quad (2)$$

essendo V_l il volume del blocco di legno.

Il modulo della spinta di Archimede risulta:

$$S = \rho V_{l,i} g = \rho L^2 H g \quad (3)$$

essendo $V_{l,i}$ il volume del blocco di legno che rimane immerso nell'acqua.

Sostituendo la (2) e la (3) nella (1) ed ipotizzando che la densità dell'acqua sia $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, si ottiene:

$$\rho_l L^3 g = \rho L^2 H g$$

$$\Rightarrow H = \frac{\rho_l L}{\rho} = \frac{465 \cdot 0.4}{1000} = 0.186 \text{ m}$$

La percentuale del volume del blocco di legno che rimane fuori dall'acqua risulta:

$$\triangleright \left(1 - \frac{V_{l,i}}{V_l}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{L^2 H}{L^3}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{H}{L}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{0.186}{0.4}\right) \cdot 100 = 53.5\%$$

Dalla definizione di portata volumetrica (cfr. par. 2.8) si ottiene:

$$q_v = \frac{V}{\Delta\tau}$$

$$\triangleright \Delta\tau = \frac{V}{q_v} = \frac{40}{0.0097} = 4124 \text{ s} = 1 \text{ h } 8' 44''$$

Ipotizzando che la pressione esterna sia pari alla pressione atmosferica normale, la pressione esercitata dall'acqua sul fondo della vasca una volta riempita risulta:

$$\triangleright p = p_{\text{atm}} + \rho gh = 101325 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 2 = 120945 \text{ Pa}$$

Esercizio 14

Un corpo cubico di lato 25 cm è attaccato a una molla, caratterizzata da una costante elastica pari a 0.22 kN/m, ancorata al fondo di una vasca piena d'acqua. Sapendo che in condizioni di equilibrio il corpo si trova ad una quota di 3 m rispetto al fondo della piscina e che la molla risulta compressa di 7 cm, determinare:

- il volume specifico del corpo,
- il tempo impiegato dall'oggetto a raggiungere il fondo della piscina una volta sganciato dalla molla, trascurando l'attrito tra blocco e fluido.

Se in un secondo tempo viene attaccato alla molla un corpo di uguale volume e di densità pari a 680 kg/m³, determinare:

- lo spostamento della molla rispetto alla posizione di rilassamento, specificando se è compressa o allungata.

Risoluzione

$$L = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$$

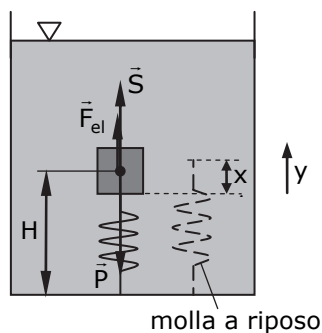
$$k = 0.22 \text{ kN/m} = 220 \text{ N/m}$$

$$H = 3 \text{ m}$$

$$x = 7 \text{ cm} = 0.07 \text{ m}$$

Il volume del corpo risulta:

$$V = L^3 = 0.25^3 = 1.56 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$



Dalla seconda legge della dinamica si ha:

$$\vec{S} + \vec{F}_{el} + \vec{P} = 0$$

In direzione y si ha:

$$S_y + F_{el,y} + P_y = 0$$

$$S + F_{el} - P = 0 \quad (1)$$

Il modulo della spinta di Archimede risulta:

$$S = \rho_{H_2O} V g \quad (2)$$

Il modulo della forza elastica risulta:

$$F_{el} = kx \quad (3)$$

Il modulo della forza peso risulta:

$$P = mg = \rho V g = \frac{Vg}{v} \quad (4)$$

Sostituendo la (2), la (3) e la (4) nella (1) ed ipotizzando che la densità dell'acqua sia $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, si ottiene:

$$\rho_{H_2O} V g + kx - \frac{Vg}{v} = 0$$

$$\triangleright v = \frac{Vg}{\rho_{H_2O} V g + kx} = \frac{1.56 \cdot 10^{-2} \cdot 9.81}{1000 \cdot 1.56 \cdot 10^{-2} \cdot 9.81 + 220 \cdot 0.07} = 9.086 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Nel caso in cui il corpo sia sganciato dalla molla, dalla seconda legge della dinamica si ha:

$$\vec{S} + \vec{P} = m \vec{a}$$

In direzione y si ha:

$$S_y + P_y = m a_y$$

$$S - P = m a_y \quad (5)$$

Sostituendo la (2) e la (4) nella (5), si ha:

$$\rho_{H_2O} V g - \frac{Vg}{v} = \frac{V}{v} a_y$$

$$a_y = g(v\rho_{H_2O} - 1) = 9.81 \cdot (9.086 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 - 1) = -0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

L'accelerazione è diretta verso il basso ovvero il corpo affonda.

Essendo il moto rettilineo uniformemente accelerato, si ha:

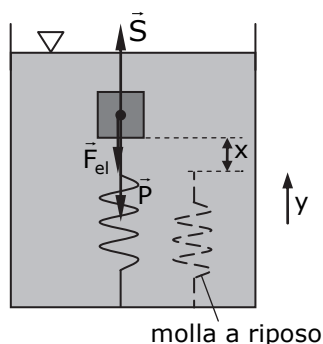
$$y = y_0 + w_{0y}\tau + \frac{1}{2}a_y\tau^2$$

Essendo $y_0 - y = H$ e $w_{0y} = 0$, si ottiene:

$$\tau = \sqrt{-\frac{2H}{a_y}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{0.9}} = 2.6 \text{ s}$$

Nel terzo quesito la densità del corpo vale:

$$\rho = 680 \text{ kg/m}^3$$



Dalla seconda legge della dinamica si ha in direzione y:

$$F_{el,y} = -S_y - P_y = -S + P \quad (6)$$

Sostituendo la (2) e la (4) nella (6), si ottiene:

$$F_{el,y} = -\rho_{H_2O}Vg + \rho Vg = Vg(\rho - \rho_{H_2O}) \quad (7)$$

Essendo $\rho_{H_2O} > \rho$, risulta $F_{el,y} < 0$, ovvero la forza elastica $\vec{F}_{el}$ è diretta verso il basso e lo spostamento $\vec{x}$ della molla è diretto verso l'alto con conseguente allungamento della stessa.

Ricordando che $F_{el,y} = -kx$, dalla (7) si determina l'allungamento della molla rispetto alla posizione di rilassamento:

$$-kx = Vg(\rho - \rho_{H_2O})$$

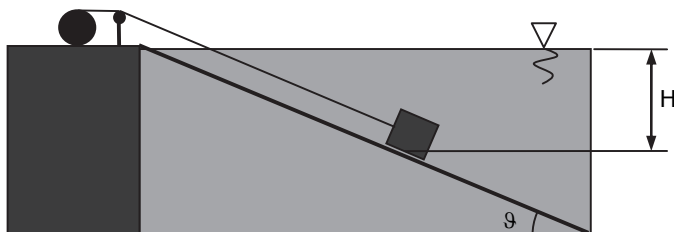
$$x = -\frac{Vg(\rho - \rho_{H_2O})}{k} = -\frac{1.56 \cdot 10^{-2} \cdot 9.81 \cdot (680 - 1000)}{220} = 0.22 \text{ m} = 22 \text{ cm}$$

Esercizio 15

Un argano è impiegato per portare fuori dall'acqua un blocco di ferro ($\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$) di massa pari a 1500 kg, inizialmente posto ad una profondità di 25 m rispetto al pelo libero. Ipotizzando che il blocco sia fatto risalire con velocità costante su un piano inclinato di 35° rispetto all'orizzontale e sapendo che il coefficiente d'attrito tra il piano e il blocco è pari a 0.7, determinare:

- la spinta archimedeica agente sul blocco;
- la reazione vincolare del piano e la tensione della fune;

- la velocità di trascinamento del blocco, sapendo che il tamburo dell'argano ha un diametro di 70 cm e fa un giro in 40 s;
- la potenza necessaria e il tempo impiegato per portare il blocco fuori dall'acqua, trascurando l'attrito tra blocco e fluido.



Risoluzione

$$m = 1500 \text{ kg}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$H = 25 \text{ m}$$

$$\theta = 35^\circ$$

$$\mu = 0.7$$

$$T = 40 \text{ s}$$

$$D = 70 \text{ cm} = 0.7 \text{ m}$$

Il volume del blocco risulta:

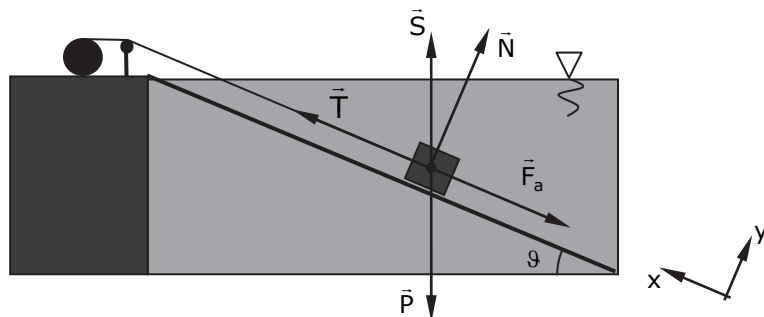
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1500}{7800} = 0.192 \text{ m}^3$$

La spinta di Archimede agente sul blocco, ipotizzando che la densità dell'acqua sia pari a 1000 kg/m^3 , vale:

$$\text{➤ } S = \rho_{H_2O} V g = 1000 \cdot 0.192 \cdot 9.81 = 1884 \text{ N}$$

Le forze che agiscono sul blocco sono rappresentate in figura. Dalla seconda legge della dinamica, scritta in termini vettoriali, risulta:

$$\vec{T} + \vec{S} + \vec{N} + \vec{F}_a + \vec{P} = 0$$



Nelle direzioni x e y si ha:

$$\begin{cases} T_x + S_x + F_{ax} + P_x = 0 \\ S_y + N_y + P_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T + S \sin \vartheta - F_a - P \sin \vartheta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} S \cos \vartheta + N - P \cos \vartheta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

La reazione vincolare del piano si ottiene direttamente dalla (2):

$$\begin{aligned} \text{➤ } N &= (P - S) \cos \vartheta = (\rho - \rho_{H_2O}) V g \cos \vartheta = \\ &= (7800 - 1000) \cdot 0.192 \cdot 9.81 \cdot \cos 35^\circ = 10491 \text{ N} \end{aligned}$$

La forza d'attrito risulta:

$$F_a = \mu N = 0.7 \cdot 10491 = 7344 \text{ N}$$

La tensione della fune si ricava dalla (2):

$$\begin{aligned} \text{➤ } T &= F_a + (P - S) \sin \vartheta = F_a + (\rho - \rho_{H_2O}) V g \sin \vartheta = \\ &= 7344 + (7800 - 1000) \cdot 0.192 \cdot 9.81 \cdot \sin 35^\circ = 14691 \text{ N} \end{aligned}$$

La frequenza di rotazione del tamburo vale:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ Hz}$$

La velocità angolare di rotazione risulta:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 0.025 = 0.16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocità tangenziale del tamburo è la velocità con cui sale il blocco di ferro:

$$\text{➤ } w = \omega R = \omega \frac{D}{2} = 0.16 \cdot \frac{0.7}{2} = 0.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La potenza necessaria per portare il blocco fuori dall'acqua è proporzionale alla tensione della fune e alla velocità del blocco e vale:

$$P = Tw = 14691 \cdot 0.06 = 881 \text{ W}$$

Lo spazio che il blocco deve percorrere prima di uscire dall'acqua risulta:

$$s = \frac{H}{\sin \vartheta} = \frac{25}{\sin 35^\circ} = 43.6 \text{ m}$$

Essendo il moto del blocco rettilineo uniforme, il tempo impiegato dal blocco ad uscire dall'acqua vale:

$$\text{➤ } \tau = \frac{s}{w} = \frac{43.6}{0.06} = 727 \text{ s} = 12' 7''$$

Esercizio 16

Un termometro galileiano è costituito da un cilindro di vetro riempito con acqua (altezza del pelo libero H pari a 30 cm), in cui sono immerse tre ampole di vetro riempite mediante un liquido colorato, così come rappresentato in figura. Ogni ampolla ha attaccata una leggera targhetta che indica una temperatura. Sapendo che le ampolle sono sferiche ed hanno diametro pari a 3 cm e massa pari a 10 g, determinare:

- la massa che devono avere le targhette che indicano le temperature 16 °C, 20 °C, 24 °C.

Se la temperatura dell'aria circostante il termometro passa bruscamente da 26 °C a 22 °C, nell'ipotesi di considerare l'acqua in equilibrio termico con l'aria, disegnare come cambia la disposizione delle ampole all'interno del termometro e, nel caso di cambiamento, determinare:

- il tempo impiegato dalle ampole a venire a galla o ad affondare all'interno del recipiente, considerando le ampole come punti materiali e trascurando l'attrito tra ampole e fluido.

Si ipotizzi che la densità dell'acqua vari con la temperatura in base alla seguente legge:

$$\rho = 1000 - 0.055T - 0.00375T^2 \quad [T] = [^{\circ}\text{C}]$$

Risoluzione

$$H = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$D = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

$$m_a = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}$$

Il volume delle ampole vale:

$$V = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi \cdot 0.03^3}{6} = 1.414 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

La densità dell'acqua alle tre temperature indicate sulle targhette vale:

$$\rho_{16} = 1000 - 0.055 \cdot 16 - 0.00375 \cdot 16^2 = 998.16 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{20} = 1000 - 0.055 \cdot 20 - 0.00375 \cdot 20^2 = 997.40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_{24} = 1000 - 0.055 \cdot 24 - 0.00375 \cdot 24^2 = 996.52 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dal momento che la densità dell'acqua diminuisce all'aumentare della temperatura, se la temperatura dell'acqua contenuta nel termometro, in equilibrio con l'aria circostante, è superiore al valore indicato sulla targhetta l'ampolla affonda, viceversa se è inferiore galleggia. Pertanto al valore di temperatura indicato sulla targhetta deve risultare che la spinta archimedeica agente sull'ampolla equilibra il peso dell'ampolla comprensivo della targhetta.

Il modulo della forza peso risulta:

$$P = (m_a + m_t)g \quad (1)$$

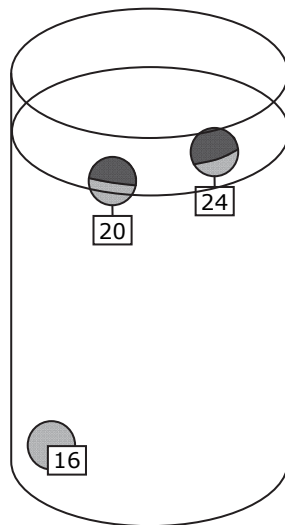
essendo m_t la massa della targhetta.

Il modulo della spinta di Archimede, trascurando il volume occupato dalla targhetta, risulta:

$$S = \rho V g \quad (2)$$

Uguagliando la (1) e la (2), si ottiene:

$$m_t = \rho V - m_a$$



La massa della targhetta alle differenti temperature risulta quindi:

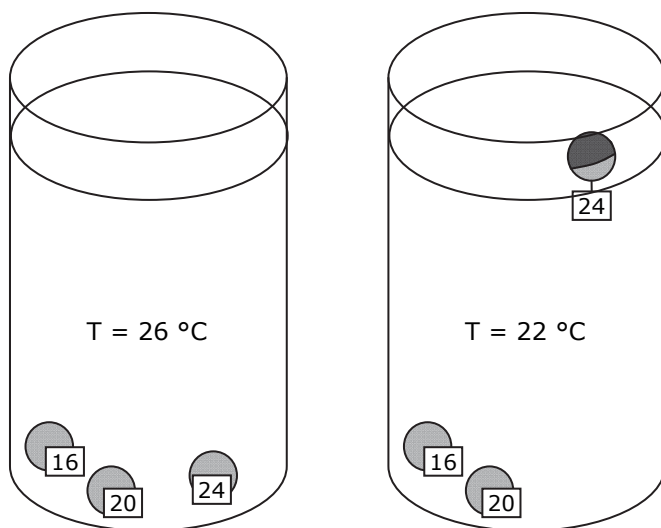
$$\text{➤ } m_{t,16} = \rho_{16} V - m_a = 998.16 \cdot 1.414 \cdot 10^{-5} - 0.01 = 0.004114 \text{ kg} = 4.114 \text{ g}$$

$$\text{➤ } m_{t,20} = \rho_{20} V - m_a = 997.40 \cdot 1.414 \cdot 10^{-5} - 0.01 = 0.004103 \text{ kg} = 4.103 \text{ g}$$

$$\text{➤ } m_{t,24} = \rho_{24} V - m_a = 996.52 \cdot 1.414 \cdot 10^{-5} - 0.01 = 0.004091 \text{ kg} = 4.091 \text{ g}$$

Si osservi che la precisione tra le targhetta deve essere al centesimo di grammo.

Nel caso in cui la temperatura sia 26 °C, le ampole sono tutte sul fondo; nel caso in cui la temperatura sia 22 °C, le ampole 16 °C e 20 °C restano sul fondo, mentre quella 24 °C galleggia, così come rappresentato in figura.



La densità dell'acqua a 22 °C vale:

$$\rho_{22} = 1000 - 0.055 \cdot 22 - 0.00375 \cdot 22^2 = 996.98 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La massa dell'ampolla 24 °C, comprensiva della targhetta, vale:

$$m_{24} = m_a + m_t = 0.01 + 0.004091 = 0.014091 \text{ kg}$$

Applicando la seconda legge della dinamica all'ampolla 24 °C, quando la temperatura dell'acqua nel termometro è 22 °C, si ottiene il modulo dell'accelerazione con cui l'ampolla raggiunge il pelo libero dell'acqua:

$$S - P = ma$$

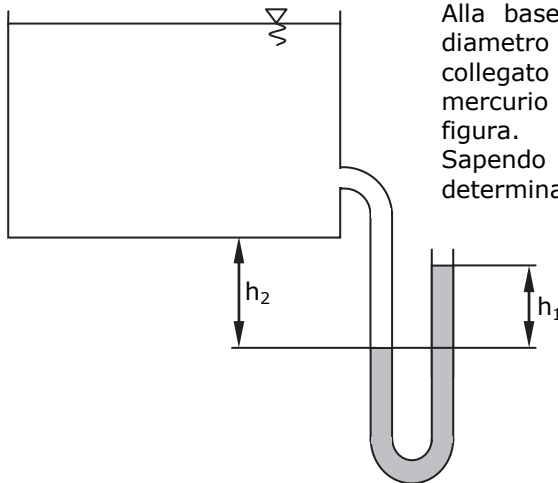
$$\rho_{22} V g - m_{24} g = m_{24} a$$

$$a = \frac{(\rho_{22} V - m_{24}) g}{m_{24}} = \frac{(996.98 \cdot 1.414 \cdot 10^{-5} - 0.014091) \cdot 9.81}{0.014091} = 4.38 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Applicando le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato, si ottiene il tempo necessario alla salita:

$$H = w_0 \tau + \frac{1}{2} a \tau^2$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.3}{4.38 \cdot 10^{-3}}} = 11.7 \text{ s}$$

Esercizio 17

Alla base di un serbatoio cilindrico, di diametro pari a 5 m, contenente acqua è collegato un manometro differenziale a mercurio ($\rho_{\text{Hg}} = 13594.6 \text{ kg/m}^3$) come in figura.

Sapendo che $h_1 = 70 \text{ cm}$ e $h_2 = 95 \text{ cm}$ determinare:

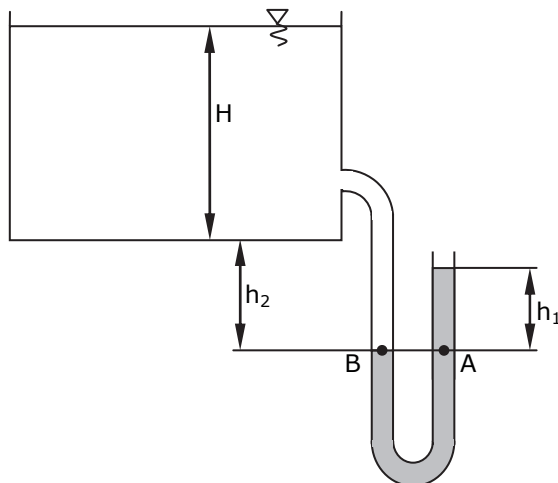
- la pressione sul fondo del recipiente e il numero di litri d'acqua in esso contenuto,
- il dislivello del mercurio h_1 nel caso in cui la massa d'acqua presente nel serbatoio venga ridotta del 30%, ipotizzando che la quota h_2 rimanga invariata.

Risoluzione

$$D = 5 \text{ m}$$

$$h_1 = 70 \text{ cm} = 0.7 \text{ m}$$

$$h_2 = 95 \text{ cm} = 0.95 \text{ m}$$



Essendo $p_A = p_B$, dalla legge di Stevino si ottiene:

$$p_{\text{atm}} + \rho_{\text{Hg}}gh_1 = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}g(H + h_2)$$

La profondità H del recipiente rispetto al pelo libero dell'acqua, ipotizzando che la densità dell'acqua sia pari a 1000 kg/m^3 , risulta:

$$H = \frac{\rho_{\text{Hg}}h_1 - \rho_{\text{H}_2\text{O}}h_2}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{13594.6 \cdot 0.7 - 1000 \cdot 0.95}{1000} = 8.57 \text{ m}$$

La pressione sul fondo del recipiente, ipotizzando che la pressione esterna sia la pressione atmosferica normale, vale:

$$\text{➤ } p = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}gH = 101325 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 8.57 = 185397 \text{ Pa} = 1.85 \text{ bar}$$

Il volume del recipiente vale:

$$\text{➤ } V = \frac{\pi D^2}{4} H = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} \cdot 8.57 = 168.272 \text{ m}^3 = 168272 \text{ lt}$$

Se la massa d'acqua all'interno del recipiente viene ridotta del 30%, la nuova profondità H^* vale:

$$H^* = 0.7H = 0.7 \cdot 8.57 = 6 \text{ m}$$

Il nuovo dislivello h_1^* risulta:

$$p_{\text{atm}} + \rho_{\text{Hg}}gh_1^* = p_{\text{atm}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}g(H^* + h_2)$$

$$\text{➤ } h_1^* = \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Hg}}} (H^* + h_2) = \frac{1000}{13594.6} \cdot (6 + 0.95) = 0.51 \text{ m} = 51 \text{ cm}$$

1.5 Circuiti elettrici

Esercizio 18

Dato il circuito elettrico rappresentato in figura, sono noti i seguenti dati: $V = 220 \text{ V}$, $i_1 = 250 \text{ mA}$ (corrente che attraversa R_1), $R_1 = 210 \Omega$, $R_3 = 330 \Omega$, $R_4 = 120 \Omega$. Si determini:

- la resistenza equivalente del circuito e la potenza termica dissipata nella resistenza R_2 ,
- la corrente che attraversa la resistenza R_3 , specificandone il verso,
- la differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito.

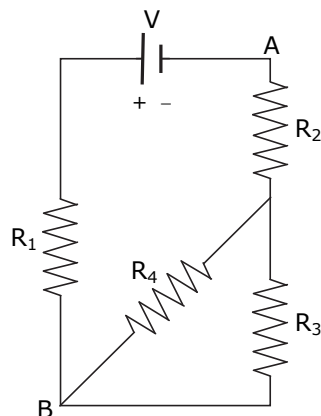
Risoluzione

$$V = 220 \text{ V}$$

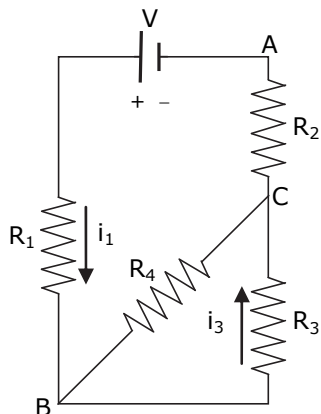
$$i_1 = 250 \text{ mA} = 0.25 \text{ A}$$

$$R_1 = 210 \Omega$$

$$R_3 = 330 \Omega$$



$$R_4 = 120 \, \Omega$$



La resistenza equivalente del circuito vale:

$$\text{➤ } R_{eq} = \frac{V}{i_1} = \frac{220}{0.25} = 880 \, \Omega$$

La resistenza equivalente di R_3 e R_4 in parallelo vale:

$$R_{eq_{3,4}} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{330 \cdot 120}{330 + 120} = 88 \, \Omega$$

Essendo R_1 , $R_{eq_{3,4}}$ e R_2 in serie, si ha:

$$R_2 = R_{eq} - R_1 - R_{eq_{3,4}} = 880 - 210 - 88 = 582 \, \Omega$$

$$\text{➤ } P_{diss, R_2} = R_2 i_1^2 = 582 \cdot 0.25^2 = 36.4 \, W$$

La differenza di potenziale tra C e B risulta:

$$V_{CB} = V_B - V_C = R_{eq_{3,4}} i_1 = 88 \cdot 0.25 = 22 \, V$$

La corrente che attraversa la resistenza R_3 vale:

$$V_{CB} = V_B - V_C = R_3 i_3$$

$$\text{➤ } i_3 = \frac{V_{CB}}{R_3} = \frac{22}{330} = 0.067 \, A = 67 \, mA, \text{ diretta come in figura.}$$

La differenza di potenziale tra A e B risulta:

$$V_B + R_1 i_1 - V = V_A$$

$$\text{➤ } V_{AB} = V_B - V_A = V - R_1 i_1 = 220 - 210 \cdot 0.25 = 167.5 \, V$$

oppure

$$V_B - (R_{eq_{3,4}} + R_2) i_1 = V_A$$

$$\text{➤ } V_{AB} = V_B - V_A = (R_{eq_{3,4}} + R_2) i_1 = 0.25 \cdot (582 + 88) = 167.5 \, V$$

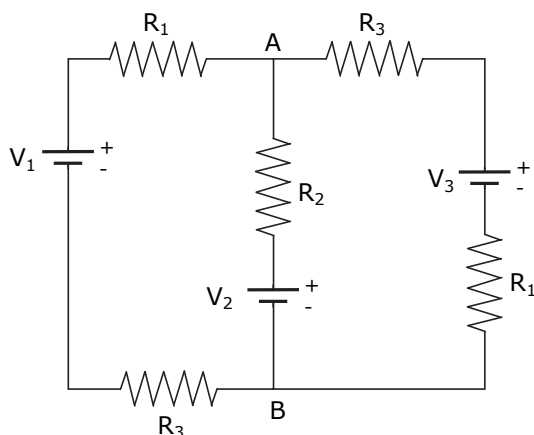
Esercizio 19

Dato il circuito elettrico rappresentato in figura ($V_1 = 4 \text{ V}$, $V_2 = 2 \text{ V}$, $V_3 = 5 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$), determinare:

- l'intensità ed il verso delle correnti in ciascun ramo,
- la differenza di potenziale tra i punti A e B,

Verificare inoltre:

- il bilancio energetico del circuito (potenza erogata = potenza assorbita), specificando se V_1 , V_2 e V_3 sono effettivamente dei generatori o sono degli assorbitori.

Risoluzione

$$V_1 = 4 \text{ V}$$

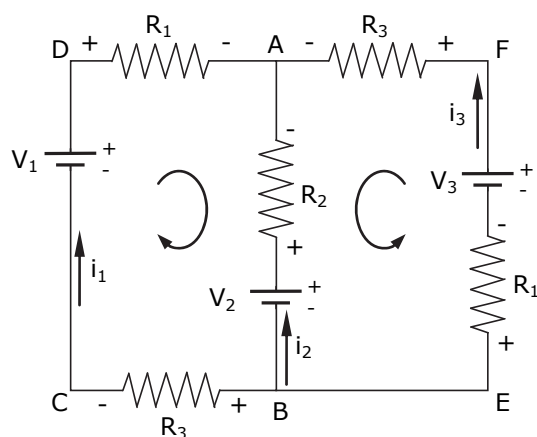
$$V_2 = 2 \text{ V}$$

$$V_3 = 5 \text{ V}$$

$$R_1 = 1 \Omega$$

$$R_2 = 3 \Omega$$

$$R_3 = 5 \Omega$$



Ipotizzando che in ciascun ramo del circuito il verso della corrente sia quello riportato in figura e applicando le leggi di Kirchhoff, si ottiene il seguente sistema algebrico di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 & \text{nodo A} & (1) \\ R_2 i_2 - V_2 - R_3 i_1 + V_1 - R_1 i_1 = 0 & \text{maglia ABCDA} & (2) \\ R_2 i_2 - V_2 - R_1 i_3 + V_3 - R_3 i_3 = 0 & \text{maglia ABEFA} & (3) \end{cases}$$

Ricavando i_1 e i_3 dalla (2) e dalla (3) e sostituendo nella (1), si ottiene:

$$i_1 = \frac{V_1 - V_2 + R_2 i_2}{R_1 + R_3}$$

$$i_3 = \frac{V_3 - V_2 + R_2 i_2}{R_1 + R_3}$$

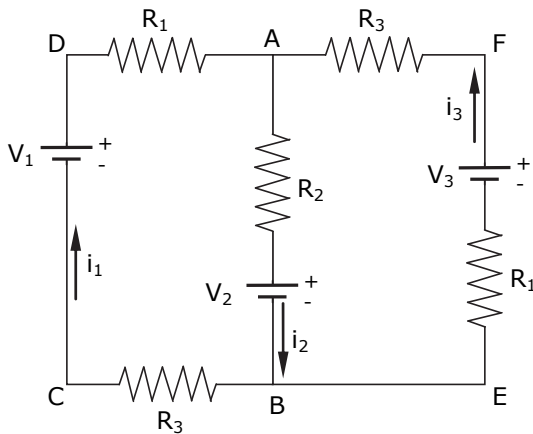
$$\Rightarrow i_2 = \frac{2V_2 - V_1 - V_3}{2R_2 + R_1 + R_3} = \frac{2 \cdot 2 - 4 - 5}{2 \cdot 3 + 1 + 5} = -0.417 \text{ A}$$

Ne segue che:

$$\Rightarrow i_1 = \frac{4 - 2 - 3 \cdot 0.417}{1 + 5} = 0.125 \text{ A}$$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{5 - 2 - 3 \cdot 0.417}{1 + 5} = 0.292 \text{ A}$$

Il verso delle correnti i_1 e i_3 è stato ipotizzato correttamente, mentre la corrente i_2 è diretta nel verso opposto a quello ipotizzato, come rappresentato nella seguente figura.



Risulta:

$$i_1 = 0.125 \text{ A}$$

$$i_2 = 0.417 \text{ A}$$

$$i_3 = 0.292 \text{ A}$$

Vale la seguente relazione per il ramo AB:

$$V_A - i_2 R_2 - V_2 = V_B$$

Ne segue:

$$\Rightarrow V_B - V_A = -i_2 R_2 - V_2 = -0.417 \cdot 3 - 2 = -3.25 \text{ V}$$

V_1 e V_3 sono effettivamente dei generatori (le correnti i_1 e i_3 sono dirette dal - al +), V_2 è un assorbitore (la corrente i_2 è diretta dal + al -). Il bilancio energetico del circuito risulta quindi:

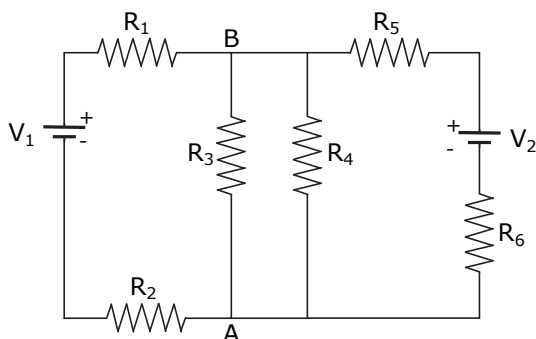
$$\text{➤ } P_{\text{generata}} = V_1 i_1 + V_3 i_3 = 4 \cdot 0.125 + 5 \cdot 0.292 = 1.96 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } P_{\text{assorbita}} &= V_2 i_2 + R_1(i_1^2 + i_3^2) + R_2 i_2^2 + R_3(i_1^2 + i_3^2) = \\ &= 2 \cdot 0.417 + 1 \cdot (0.125^2 + 0.292^2) + 3 \cdot 0.417^2 + 5 \cdot (0.125^2 + 0.292^2) = \\ &= 1.96 \text{ W} \end{aligned}$$

Esercizio 20

Dato il circuito elettrico in figura, sono noti i seguenti dati: $R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 15 \, \Omega$, $R_3 = 20 \, \Omega$, $R_4 = 30 \, \Omega$, $R_6 = 3 \, \Omega$, $V_1 = 40 \text{ V}$, $V_2 = 190 \text{ V}$, $V_B - V_A = 120 \text{ V}$. Determinare:

- la corrente che attraversa la resistenza R_3 , specificandone il verso (verso l'alto o verso il basso), e la resistenza equivalente di R_3 e R_4 ,
- la corrente che attraversa la resistenza R_1 , specificandone il verso (verso destra o verso sinistra),
- la resistenza R_5 .



Risoluzione

$$R_1 = 5 \, \Omega$$

$$R_2 = 15 \, \Omega$$

$$R_3 = 20 \, \Omega$$

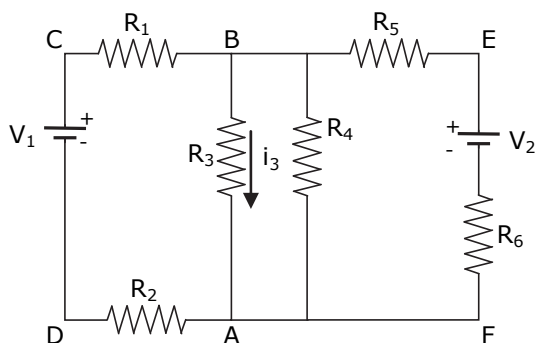
$$R_4 = 30 \, \Omega$$

$$R_6 = 3 \, \Omega$$

$$V_1 = 40 \text{ V}$$

$$V_2 = 190 \text{ V}$$

$$V_B - V_A = 120 \text{ V}$$



Applicando la legge di Ohm tra A e B si ottiene la corrente che attraversa la resistenza R_3 :

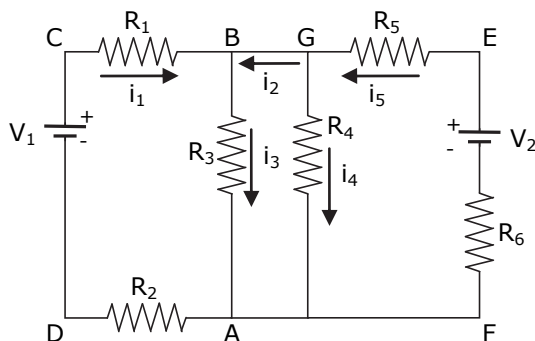
$$V_B - V_A = R_3 i_3$$

$$\rightarrow i_3 = \frac{V_B - V_A}{R_3} = \frac{120}{20} = 6 \text{ A}$$

Essendo $V_B > V_A$, i_3 è diretta verso il basso.

Le resistenze R_3 e R_4 sono in parallelo per cui risulta:

$$\rightarrow R_{3,4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \, \Omega$$



Ipotizzando che i_1 sia diretta verso destra ed applicando la legge di Kirchhoff alla maglia ADCBA, si ottiene procedendo in verso orario:

$$-R_2 i_1 + V_1 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0$$

da cui si ricava la corrente che attraversa la resistenza R_1 :

$$\rightarrow i_1 = \frac{V_1 - R_3 i_3}{R_1 + R_2} = \frac{40 - 20 \cdot 6}{5 + 15} = -4 \text{ A}$$

Essendo $i_1 < 0$, il verso ipotizzato è sbagliato; ne segue che $i_1 = 4 \text{ A}$ diretta verso sinistra.

Essendo R_4 in parallelo a R_3 , la corrente che la attraversa vale: