

EUGENIO CERONI

# **PLATEE DI FONDAZIONE**

**Nuovo metodo originale per la progettazione  
alla luce della normativa vigente**



Dario Flaccovio Editore

Eugenio Ceroni

PLATEE DI FONDAZIONE – NUOVO METODO ORIGINALE PER LA PROGETTAZIONE ALLA LUCE DELLA NORMATIVA VIGENTE

ISBN 978-88-579-0052-0

© 2010 by Dario Flaccovio Editore s.r.l. - tel. 0916700686

[www.darioflaccovio.it](http://www.darioflaccovio.it) [info@darioflaccovio.it](mailto:info@darioflaccovio.it)

Prima edizione: settembre 2010

Ceroni, Eugenio <1936->

Platee di fondazione : nuovo metodo originale per la progettazione alla luce della normativa vigente / Eugenio Ceroni. - Palermo : D. Flaccovio, 2010.

ISBN 978-88-579-0052-0

1. Fondazioni a platea.

624.15 CDD-22

SBN Pal0229509

*CIP - Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"*

Stampa: Tipografia Priulla, Palermo, settembre 2010.

Nomi e marchi citati sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

L'editore dichiara la propria disponibilità ad adempiere agli obblighi di legge nei confronti degli aventi diritto sulle opere riprodotte.

La fotocopiatura dei libri è un reato.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata dagli aventi diritto/dall'editore.



### SERVIZI GRATUITI ON LINE

Questo libro dispone dei seguenti servizi gratuiti disponibili on line:

- filodiretto con gli autori
- le risposte degli autori a quesiti precedenti
- possibilità di inserire il proprio commento al libro.

L'indirizzo per accedere ai servizi è: [www.darioflaccovio.it/scheda/?codice=DF0052](http://www.darioflaccovio.it/scheda/?codice=DF0052)

## Indice

Prefazione .....	pag. IX
Avvertenza per i lettori .....	» XI

### 1 Il calcolo approssimato delle fondazioni a platea soggette a carichi concentrati

1.1. Premessa .....	» 1
1.2. Richiami teorici .....	» 2
1.2.1. Relazioni cinematiche .....	» 3
1.2.2. Relazioni costitutive.....	» 4
1.3. Procedimento di calcolo per il dimensionamento della platea .....	» 10
1.3.1. L'equazione fondamentale .....	» 10
1.3.2. I parametri semplificativi del calcolo .....	» 11
1.3.3. Lastre circolari assialsimmetriche .....	» 11
1.3.4. Passaggio dalla teoria alla pratica .....	» 25
1.3.5. Giustificazione del metodo .....	» 33
1.4. Procedura per il calcolo e la progettazione della piastra.....	» 35
1.4.1. Verifica a taglio-punzonamento per taglio compressione .....	» 35
1.4.2. Resistenza a taglio-punzonamento in assenza di armatura specifica trasversale..	» 40
1.4.3. Resistenza a punzonamento in presenza di armatura trasversale a taglio .....	» 43
1.4.4. Analisi del fenomeno a taglio-punzonamento .....	» 45
1.4.5. Il calcolo a flessione.....	» 47
1.5. Resistenza del calcestruzzo .....	» 50
1.6. Applicazioni.....	» 52

### 2 I plinti bassi quadrati

2.1. Brevi considerazioni di geotecnica .....	» 63
2.1.1. Definizioni generali .....	» 63
2.1.2. Interazione del plinto col terreno .....	» 63
2.1.3. Bulbo di pressione .....	» 64
2.1.4. Capacità portante dei terreni .....	» 66
2.1.5. Osservazioni complementari .....	» 69
2.2. Considerazioni sul calcolo dei plinti di fondazione .....	» 69
2.2.1. Introduzione .....	» 69
2.2.2. Concetti generali .....	» 70
2.2.3. Ipotesi assunte per il calcolo .....	» 71
2.2.4. Determinazione della massima sollecitazione sul terreno .....	» 72
2.2.5. Criteri generali di massima per il dimensionamento .....	» 74
2.2.6. Calcolo dei plinti bassi a base quadrata di forma parallelepiped.....	» 78
2.2.6.1. Premessa .....	» 78
2.2.6.2. Calcolo a flessione .....	» 78
2.2.6.2.1. Concetti introduttivi .....	» 78
2.2.6.2.2. Ipotesi che considera come superficie di influenza l'area trapezoidale orizzontale 1 - 2 - 3 - 4 (a contatto col sottoplinto) ....	» 81

2.2.6.2.3.	Ipotesi che considera come superficie di influenza l'area rettangolare orizzontale 1 - 5 - 6 - 4 (a contatto col sottoplinto)....	»	82
2.2.6.2.4.	Scelta di $M_f$ .....	»	82
2.2.6.3.	Verifica al taglio-punzonamento .....	»	83
2.2.6.4.	Considerazioni complementari .....	»	83
2.2.6.5.	Verifica dell'aderenza del calcestruzzo.....	»	85
2.2.6.6.	Fessurazione .....	»	86
2.2.6.6.1.	Limitazione ampiezze fessure.....	»	86
2.2.6.6.2.	Calcolo ampiezza fessure .....	»	87
2.2.6.7.	Stato tensionale .....	»	88
2.3.	Analisi economica delle fondazioni .....	»	92
2.3.1.	Plinti isolati .....	»	92
2.3.1.1.	Calcestruzzi .....	»	93
2.3.1.2.	Tondini di acciaio .....	»	93
2.3.1.3.	Casseforme .....	»	94
2.3.1.4.	Incidenza degli scavi.....	»	94
2.3.1.5.	Costo finale .....	»	95
2.3.2.	Platea di fondazione .....	»	95
2.3.3.	Dimensionamento di avamprogetto .....	»	96
2.3.4.	Considerazioni conclusive .....	»	97
2.4.	Calcolo dei cedimenti dei plinti .....	»	98
2.4.1.	Definizioni e generalità .....	»	98
2.4.2.	Valutazione approssimata del cedimento .....	»	98
2.4.3.	Valori limiti orientativi dei cedimenti differenziali .....	»	100
2.4.4.	Interazione fra plinti.....	»	101
2.4.5.	Consigli pratici .....	»	102
2.5.	Conclusioni .....	»	102
2.6.	Applicazioni.....	»	102

### 3 I sottopassi stradali ferroviari

3.1.	Premessa .....	»	109
3.2.	Condizioni di carico del manufatto .....	»	111
3.3.	Analisi dei carichi .....	»	112
3.3.1.	Sovraccarichi ferroviari .....	»	112
3.3.2.	Sovraccarichi veicolari.....	»	113
3.3.3.	Altri tipi di traffico.....	»	114
3.4.	Sforzi in gioco .....	»	114
3.5.	Tunnel scatolari poco profondi .....	»	120
3.6.	Tunnel scatolari profondi.....	»	122
3.7.	Spinta dei manufatti.....	»	122
3.8.	Applicazioni.....	»	129

### 4 Muri di sostegno soggetti a carico lineare in prossimità del bordo superiore

4.1.	Nozioni di carattere generale.....	»	139
4.1.1.	Caso di carico lineare verticale agente in prossimità del bordo del muro.....	»	139
4.1.2.	Modalità di costruzione di muri a confine con fabbricati esistenti .....	»	147

---

4.2. Formule riassuntive .....	»	150
4.3. Applicazioni.....	»	152

### **5 Fondazioni ad anello per serbatoi cilindrici di grande diametro**

5.1. Introduzione .....	»	161
5.2. Procedimento di calcolo .....	»	161
5.2.1. Concetti di base .....	»	161
5.2.2. Determinazione degli sforzi .....	»	167
5.3. Applicazioni.....	»	170

### **6 Le fondazioni a pozzo**

6.1. Sottomurazioni con pozzi di fondazione .....	»	173
6.2. Applicazioni.....	»	174

Bibliografia.....	»	179
-------------------	---	-----

## Prefazione

Nel nuovo metodo di calcolo della piastra di fondazione che si presenta per la prima volta sono contenuti concetti fondamentali e innovativi, sperando di far cosa veramente utile a tutti gli strutturisti. Tale metodo deriva dall'aver riunito le considerazioni di Westergaard circa i carichi concentrati e i loro conseguenti effetti sul dimensionamento delle platee di fondazione, e le osservazioni del Bowles contenute in due pagine del suo ben noto e ponderoso trattato.

Si ritiene il procedimento proposto abbastanza originale, a meno che in qualche rivista o libro anglosassone non vi sia qualcosa di analogo sconosciuto allo scrivente.

Per giustificare i calcoli e le formule pratiche da usare si è dovuta riassumere la trattazione matematica della teoria delle lastre piane caricate normalmente al proprio piano che ha dato luogo all'equazione basilare di Germain-Lagrange.

Utilizzando ulteriori concetti matematici e complessi calcoli che ovviamente si sono tralasciati, si è potuto giungere a semplici formule per il calcolo del momento flettente che agisce sulla platea, dovuto ai carichi verticali concentrati trasmessi dalle colonne costituenti, insieme alle travi, la normale ossatura dei fabbricati a cui si possono aggiungere gli eventuali momenti trasmessi dalle colonne.

Si sono infine applicate le nuove norme, entrate in vigore nel 2009, relative alle strutture in cemento armato.

Si sono in particolare sviluppate le verifiche a taglio-punzonamento, tralasciando quelle a flessione che sono contenute in tutti i testi usciti in questi ultimi due anni.

Per similitudine si è arricchito il testo con alcune considerazioni sul calcolo di plinti bassi, già trattati ampiamente in un volume apparso nel 2005, che andavano profondamente modificate alla luce della nuova normativa.

Con le stesse finalità si sono riportati gli argomenti sui sottopassi stradali, sui muri di sostegno, sulle fondazioni per serbatoi circolari e sulle fondazioni a pozzo con i piccoli aggiornamenti ritenuti necessari per conformarsi alla nuova normativa.

Si fa altresì notare che, anche se sulla platea possono insistere numerosi pilastri, essendo lo spessore di questa costante, la verifica al taglio-punzonamento si ese-

gue una sola volta per il pilastro più caricato, mentre il calcolo a flessione si può effettuare per alcuni pilastri, per cui la ricerca delle funzioni  $Z$  e  $Z'$  è limitata a pochi casi.

Ritornando al calcolo delle platee, da questa prefazione invito qualche informatico a predisporre un programma di calcolo che, utilizzando i concetti e i valori numerici contenuti nella tabella basilare necessaria per il calcolo delle funzioni  $Z$ , renderà molto più spedita la determinazione dei tondini costituenti l'armatura resistente a flessione delle platee e la verifica a taglio-punzonamento. Se ci sarà qualche collega specializzato in software, la prossima edizione, se come spero questo mio lavoro sarà apprezzato, potrebbe uscire con allegato il CD.

Inutile raccomandare ai lettori più curiosi e giustamente esigenti che ulteriori approfondimenti potranno essere ottenuti consultando i testi riportati in bibliografia e in particolare quelli del prof. Giangreco, del prof. Baldacci (mio maestro a Genova), del prof. Hetenyi e il sempre universale prof. Timoshenko. Circa la trattazione del taglio-punzonamento sono molto interessanti i testi del Gambarova, Rubino e Monaco. Sono anche utili i testi divulgati con dovizia dalla Dario Flaccovio Editore e reperibili sul catalogo dello stesso editore.

Devo ringraziare infine la mia collaboratrice, geometra Francesca Lagorio, per la cura e l'attenzione nel redigere il testo.

Maggio 2010

*Eugenio Ceroni*

## **Avvertenza per il lettori**

Gli esempi numerici contenuti sia nel testo che nelle Applicazioni pratiche hanno solo lo scopo di accompagnare il lettore nell'applicazione dei contenuti e concetti espressi.

Pertanto quando si indicano le caratteristiche di sollecitazione, come momenti (M) e tagli (V), questi si intendono già comprensivi degli effetti derivanti dall'applicazione di quanto indicato dal D.M. 14.01.2008 e successiva Circolare 02.02.2009.

Ciò deriva anche dal fatto che le varie ipotesi considerate nella normativa e in particolare la parte relativa al calcolo antisismico variano da zona a zona e secondo la tipologia dei fabbricati.

Si è pertanto preferito applicare i concetti esposti nel libro nella maniera più semplice per non appesantire il testo e non creare confusione.

Il lettore saprà poi districarsi nella maniera più opportuna e secondo le condizioni, applicando la normativa nel modo più appropriato.



# 1 IL CALCOLO APPROSSIMATO DELLE FONDAZIONI A PLATEA SOGGETTE A CARICHI CONCENTRATI

## 1.1. PREMESSA

La piastra di fondazione, detta anche *platea*, è, fra le fondazioni superficiali, la tipologia che meglio si adatta a contrastare i cedimenti differenziali.

Realizzata con calcestruzzo armato, ha la forma di un parallelepipedo, con spessore che varia in genere da 40 cm a 100 cm, mentre la lunghezza e la larghezza sono legate alla geometria della sovrastruttura, talvolta coincidente con la sua proiezione sul suolo.

Lo spessore è legato fundamentalmente alle sollecitazioni di taglio o punzonamento provenienti dai pilastri.

L'area della fondazione, nettamente superiore alla soluzione di travi rovesce e graticci, consente di sfruttare al meglio la capacità portante del terreno contrastando i cedimenti differenziali provocati da una distribuzione disuniforme dei carichi provenienti dalla sovrastruttura.

Ogni porzione di piastra, o platea, ha l'onere di sostenere un pilastro, che sorregge a sua volta una porzione della sovrastruttura, trasferendone il carico in fondazione.

La piastra di fondazione viene realizzata sopra un getto di pulizia, che la proteggerà dalle aggressioni chimiche del suolo; si tratta di uno strato di conglomerato di calcestruzzo non armato, privo di armatura metallica, a basso contenuto di cemento, chiamato *magrone*, posizionato alla quota di scavo, stabilita dal progettista.

La piastra di fondazione viene realizzata all'interno di una cassaforma in legno o talvolta metallica, disponendo solitamente una doppia orditura di barre ortogonali di acciaio da carpenteria, al lembo superiore e al lembo inferiore, che dovranno sopportare le azioni di flessione.

Le considerazioni esposte nel presente testo derivano da lunghi studi e pratica professionale i cui risultati si presentano per proporre un calcolo semplificato della platea di fondazioni per edifici di abitazione e per il terziario con colonne che sono gravate da carichi verticali più o meno dello stesso ordine di grandezza e disposte a maglia abbastanza regolare e su suolo elastico di caratteristiche uniformi.

Vi saranno degli sviluppi analitici e proposte di formulario allo scopo di orientare il lettore.

In bibliografia sarà possibile trovare tutti i riferimenti necessari per la completa giustificazione di formule e relazioni che di seguito saranno esposte.

## 1.2. RICHIAMI TEORICI

Si definisce *piastra* un elemento strutturale avente due dimensioni (lunghezza e larghezza) prevalenti rispetto alla terza (lo spessore) e la cui superficie media sia piana (lastra piana). In genere si considera piastra un elemento piano sottile il cui spessore  $h$  sia inferiore a un ventesimo della dimensione minima  $l$  nel piano medio:

$$\frac{h}{l} < \frac{1}{20}$$

Il comportamento delle piastre si può suddividere, in una prima analisi, in:

- comportamento a flessione: si valutano le deformazioni in direzione ortogonale al piano medio (lungo lo spessore);
- comportamento a membrana: si valutano le deformazioni nel piano medio.

I due tipi di analisi possono essere utilizzati separatamente qualora il carico applicato deformi la piastra prevalentemente a flessione o a membrana.

È inoltre possibile combinare le equazioni dei due tipi di analisi per ottenere un modello di piastra più completo.

A seconda del tipo di modellizzazione del comportamento, le piastre possono distinguersi in 3 categorie:

- piastre sottili con piccole deflessioni del piano medio (piastra di Kirchhoff);
- piastre sottili con grandi deflessioni del piano medio;
- piastre di grande spessore (che rispetti comunque la definizione).

Le ipotesi alla base di questa modellizzazione dell'elemento piastra, in analogia con quelle poste alla base della teoria elementare delle travi, sono riassunte di seguito.

1. La deflessione  $w$  del piano medio della piastra ( $z = 0$ ) è piccola rispetto allo spessore  $h$ : di conseguenza la sua derivata prima nelle direzioni  $x$  e  $y$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  risulta piccola e il suo quadrato trascurabile rispetto a uno.
2. A seguito della deflessione, il piano medio rimane indeformato.
3. Le sezioni inizialmente normali al piano medio rimangono piane e ortogonali ad esso dopo la deflessione. Di conseguenza gli scorrimenti in direzione  $z$  sono nulli:

$$\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$$

e la deflessione della piastra è dovuta sostanzialmente a deformazioni flessionali. Anche la deformazione  $\epsilon_z$  risulta piccola e quindi trascurabile rispetto alle altre.

4. Lo sforzo normale (in direzione  $z$ ),  $\sigma_z$ , risulta piccolo rispetto alle altre componenti di sforzo e può essere trascurato.

Se la deflessione non può essere ritenuta piccola (ossia non è dello stesso ordine di grandezza dello spessore della piastra) allora la flessione avviene con deformazione del piano medio e le ipotesi 1 e 2 non risultano più verificate.

Nel caso di piastre di grande spessore allora gli sforzi di taglio diventano importanti e le ipotesi 3 e 4 non sono più valide.

Occorre pertanto utilizzare una teoria più generale.

### 1.2.1. Relazioni cinematiche

L'operatore funzionale che agisce sullo spostamento collegandolo con il vettore ingegneristico delle deformazioni è una matrice che nel caso più generale assume la forma [3 x 6]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (0-1)$$

Per l'ipotesi 3,  $\epsilon_z = 0$ , ossia tramite il legame cinematica sopra espresso:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

la dipendenza di  $w$  dalle variabili spaziali viene ridotta a:

$$w = w(x, y)$$

### 1.2.2. Relazioni costitutive

Utilizzando le equazioni costitutive per un solido isotropo a comportamento lineare, riscritte nel caso di stato di sforzo bidimensionale ( $\sigma_{zz} = 0$ ):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

e utilizzando le espressioni ricavate per le relazioni cinematiche, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{E_z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{E_z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ -\frac{Ez}{1-\mu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

Si osservi la linearità degli sforzi lungo lo spessore. Come per ipotesi, il piano medio risulta non deformato, pertanto non sollecitato.

Nella trattazione si fa riferimento alla figura 1.1 dove è rappresentato lo stato di tensione di un elemento di piastra.

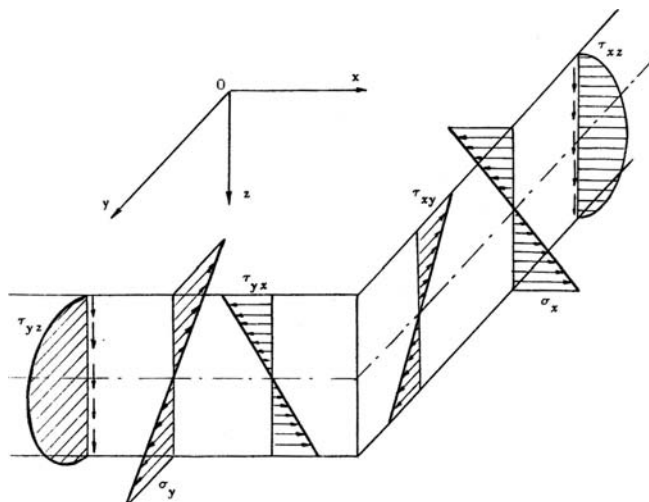


Figura 1.1  
Stato tensionale nella piastra

Dalla (1-1) si ricavano sotto forma più significativa:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{xz} &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1-\mu^2} z(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2-1}$$

Le (2-1) sono state ottenute con le seguenti ipotesi e con gli assi cartesiani disposti come in figura:

- la piastra di spessore  $h$  si pensa caricata con una distribuzione di forze qualsiasi agenti parallelamente all'asse  $z$ ;
- $w$  è la componente di deformazione lungo  $z$ ;
- $E$  e  $\mu$  sono il modulo di Young e di Poisson del materiale costituente la piastra.

Integrando le (2-1) fra  $-\frac{h}{2}$  ed  $\frac{h}{2}$  e tralasciando tutta la specifica trattazione chiaramente esposta nel testo del professor Giangreco indicato in bibliografia, si ottengono (figura 1.2):

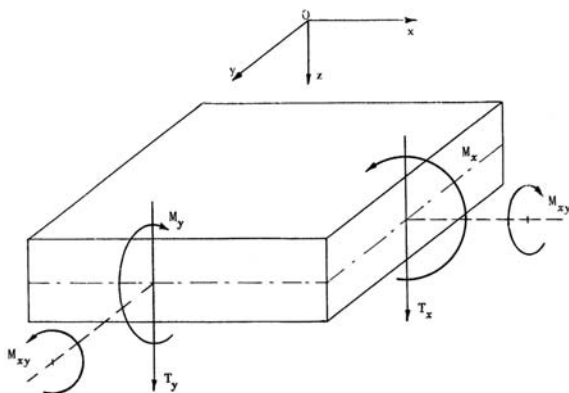


Figura 1.2  
Azioni agenti sulla piastra

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3-1)$$

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} z dz = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w$$

$$T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} z dz = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w$$

dove:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4-1)$$

è la rigidezza flessionale della piastra.

Con considerazioni di equilibrio sull'elemento di piastra (figura 1.3), si giunge infine all'equazione:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x,y) \quad (5-1)$$

ove

$p$  è il carico verticale.

Con ulteriori passaggi, tutti contenuti nel testo citato, si ottiene infine la cosiddetta equazione di Germain-Lagrange:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x,y) \quad (6-1)$$

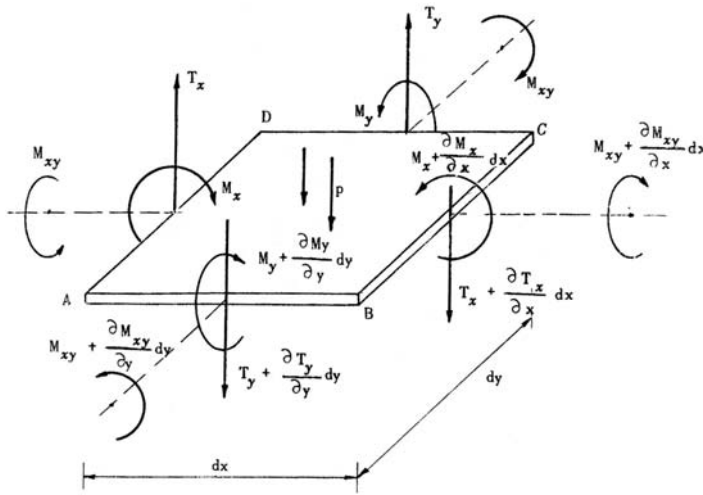


Figura 1.3  
Condizione di equilibrio  
di un elemento di piastra

ovvero:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = p(x,y) \quad (7-1)$$

e in forma simbolica succinta:

$$D \Delta \Delta w = p(x,y) \quad (8-1)$$

È anche utile, come si vedrà in seguito, formulare il problema in coordinate polari  $r, \vartheta$  (figura 1.4).

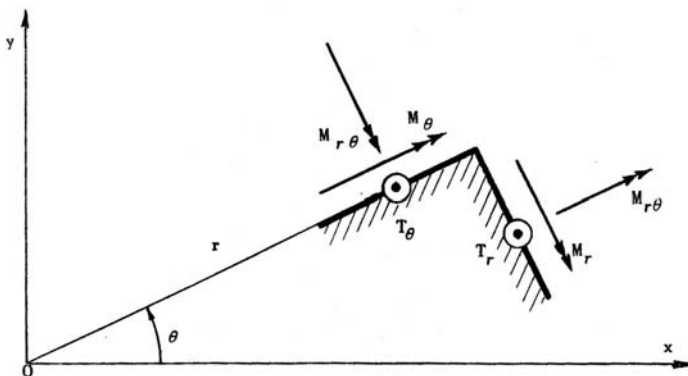


Figura 1.4  
Assi vettori  
dalle caratteristiche  
della sollecitazione  
per un generico raggio r

Occorre però assumere come caratteristiche di sollecitazione  $M_r, M_\vartheta$  e  $M_{r\vartheta}$  oltre a  $T_r$  e  $T_\vartheta$ . Per i tagli si è indicato con il punto il vettore ortogonale al piano della figura e rivolto verso il basso.

Con considerazioni di equilibrio, che si tralasciano, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 M_r &= M_x \cos^2 \vartheta + M_y \sin^2 \vartheta + M_{xy} \sin 2\vartheta \\
 M_\vartheta &= M_x \sin^2 \vartheta + M_y \cos^2 \vartheta - M_{xy} \sin 2\vartheta \\
 M_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} (M_y - M_x) \cdot \sin 2\vartheta - M_{xy} \cos 2\vartheta \\
 T_r &= T_x \cos \vartheta + T_y \sin \vartheta \\
 T_\vartheta &= -T_x \sin \vartheta + T_y \cos \vartheta
 \end{aligned} \tag{9-1}$$

Come nel caso degli stati tensionali piani, esisteranno due direzioni ortogonali principali in cui i momenti flettenti  $M_1$  e  $M_2$  assumono i valori massimo e minimo.

Il valore dell'angolo  $\vartheta$  è dato da:

$$\tan 2\vartheta = \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y}$$

ed  $M_1$  ed  $M_2$  assumono le espressioni:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2} \\
 M_2 &= \frac{M_x + M_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}
 \end{aligned}$$

Dalle prime due della (9-1) si ricava:

$$M_r + M_\vartheta = M_x + M_y \tag{9' -1}$$

Si conclude che la somma dei momenti flettenti relativi a due giaciture ortogonali qualsiasi è un invariante che viene definito *invariante di flessione*.

Per chiarezza si precisa quanto segue circa i momenti e i tagli:

- $M_x$  è il momento flettente il cui asse vettore è perpendicolare all'asse x e agisce sull'elemento di piastra di lunghezza unitaria (figura 1.2) e prima delle (3-1);
- $M_y$  è il momento flettente il cui asse vettore è perpendicolare all'asse y e agisce sull'elemento di piastra di lunghezza unitaria (figura 1.2) e seconda delle (3-1);
- $M_{xy}$  è il momento torcente il cui asse vettore è parallelo al piano x, y e agisce sull'elemento di piastra di lunghezza unitaria (figura 1.2) e terza delle (3-1) e lo stesso, per la reciprocità, in senso perpendicolare;



- $T_x$  è il taglio dovuto a  $\tau_{xz}$  e agisce sull'elemento di piastra di lunghezza unitaria (figura 1.2) e quarta delle (3-1);
- $T_y$  è il taglio dovuto a  $\tau_{yz}$  e agisce sull'elemento di piastra di lunghezza unitaria (figura 1.2) e quinta delle (3-1).

Dalla (9-1) e dalla (3-1) è possibile esprimere le caratteristiche polari in funzione delle derivate parziali di  $w$  rispetto agli assi  $x$  ed  $y$ .

Trasformando tali derivate in derivate rispetto alle coordinate polari  $r$  e  $\vartheta$ , si ottengono le seguenti espressioni:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) \right]$$

$$M_\vartheta = -D \left[ \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$M_{r\vartheta} = -D(1-\mu) \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \quad (10-1)$$

$$T_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \Delta w$$

$$T_\vartheta = -\frac{D}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Delta w$$

con:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \quad (11-1)$$

Pertanto sempre seguendo le argomentazioni e i vari passaggi del Giangreco, l'equazione fondamentale (8-1) in coordinate polari si può scrivere:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) = p(r, \vartheta) \quad (12-1)$$

I momenti  $M_r$ ,  $M_\vartheta$ ,  $M_{r\vartheta}$  sono chiamati rispettivamente:

- momento flettente radiale con vettore rappresentativo perpendicolare alla coordinata  $r$ ;
- momento flettente circonferenziale con vettore rappresentativo perpendicolare ad  $M_r$  e parallelo ad  $r$ ;
- momento torcente che, per il teorema di reciprocità, agisce normalmente ad  $M_r$  e ad  $M_\vartheta$ .

Si noti che tutti i momenti in gioco e gli sforzi di taglio sono espressi per unità di larghezza della piastra.

Il Bowles propone anche le importanti relazioni:

$$\begin{aligned} M_x &= M_\vartheta \sin^2 \vartheta + M_r \cos^2 \vartheta \\ M_y &= M_\vartheta \cos^2 \vartheta + M_r \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (13-1)$$

Ora nel caso di piastra assialsimmetrica con sforzo normale centrale e reazione del terreno uniformemente distribuita, lo spostamento  $w$  e le caratteristiche della sollecitazione risultano ancora essere assialsimmetrici e quindi indipendenti dalla anomalia  $\vartheta$  e le (10-1) diventano:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\vartheta &= -D \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \mu \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ T_r &= -D \left( \frac{d}{dr} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \\ M_{r\vartheta} &= T_\vartheta = 0 \end{aligned} \quad (14-1)$$

In prossimità della colonna,  $M_\vartheta$  ed  $M_r$  sono entrambi negativi e generano trazioni al bordo inferiore e compressioni al bordo superiore della piastra.

Nel contempo la (12-1) diventa:

$$D \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = p(r) \quad (15-1)$$

### 1.3. PROCEDIMENTO DI CALCOLO PER IL DIMENSIONAMENTO DELLA PLATEA

#### 1.3.1. L'equazione fondamentale

L'equazione differenziale di una lastra appoggiata elasticamente in ogni suo punto si ottiene dalla (8-1) considerando il carico risultante dalla differenza fra il carico  $q(x, y)$  applicato alla lastra e la reazione  $f(x, y)$  del terreno cioè:

$$D\Delta\Delta w = q(x,y) - f(x,y) \quad (8' - 1)$$

A tale equazione deve essere affiancata una relazione di carattere costitutivo che colleghi  $f(x, y)$  a  $w(x, y)$ .

Con l'ipotesi più semplice che l'inflexione  $w$  sia proporzionale alla reazione nel punto considerato la (8'-1) diventa:

$$D\Delta\Delta w + kw(x,y) = q(x,y) \quad (8''-1)$$

con  $k$  costante di Winkler del terreno di fondazione.

### 1.3.2. I parametri semplificativi del calcolo

A questo punto, prima di procedere, occorre assumere una grandezza definita da Westergaard *raggio di rigidità*  $L$  relativo alla piastra:

$$L = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} \quad (16-1)$$

e che ha le dimensioni di una lunghezza.

Si assume infine (rapporto adimensionale):

$$x = \frac{r}{L} \quad (17-1)$$

da non confondersi con l'ascissa posta lungo l'asse  $x$  della piastra<sup>1</sup>.

### 1.3.3. Lastre circolari assialsimmetriche

Nel sistema con le coordinate polari la (15-1) assume la forma:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \cdot \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) + \frac{kw(r)}{D} = \frac{q(r)}{D} \quad (18-1)$$

Con le assunzioni (16-1) e (17-1), la (18-1) si può esprimere nella variabile adimensionale  $x$ :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right) \cdot \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dw}{dx} \right) + w(x) = q \frac{l^4}{D} \quad (18'-1)$$

Attraverso complesse trasformazioni matematiche che portano a due equazioni di Bessel si giunge infine all'espressione finale di  $w$ :

$$w(x) = c_1 Z_1(x) + c_2 Z_2(x) + c_3 Z_3(x) + c_4 Z_4(x) \quad (19-1)$$

<sup>1</sup> Si è scelto di assumere  $k$  invece di  $w$  (costante di Winkler), in quanto nella letteratura sulle lastre  $w$  indica la deformazione lungo  $z$ , asse perpendicolare al piano della lastra. Lo stesso vale per l'assunzione di  $x$ , dovuta soltanto al fatto che le tabelle che si useranno in seguito e che sono state fatte proprie, assumono la grandezza  $x$ , come definita sopra nel testo di Hetenyi.

Le funzioni Z adimensionali hanno il carattere di onde esponenziali:  $Z_1$  e  $Z_2$  crescono rapidamente col crescere dell'argomento, mentre  $Z_3$  e  $Z_4$  decrescono quando l'argomento cresce. Le funzioni Z sono state introdotte la prima volta da F. Schleicher nel 1926. In termini matematicamente più corretti per valori di  $x \gg 1$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$  tendono all'infinito e  $Z_3$  e  $Z_4$  tendono a zero. Le costanti c di integrazione si determinano caso per caso in base alle condizioni di vincolo e hanno la dimensione di una lunghezza.

Le funzioni Z possono essere scritte in forma di serie di potenze:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{4!^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{6!^2} + \dots \\
 Z_2 &= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{5!^2} + \dots \\
 Z_3 &= \frac{Z_1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[ R_1 + \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot Z_2 \right] \\
 Z_4 &= \frac{Z_2}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ R_2 + \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot Z_1 \right]
 \end{aligned}
 \tag{20-1}$$

con:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\phi(3)}{3!^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{\phi(5)}{5!^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \dots \\
 R_2 &= \frac{\phi(2)}{2!^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{\phi(4)}{4!^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^8 + \frac{\phi(6)}{6!^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{12} - \dots \\
 \phi(n) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}
 \end{aligned}
 \tag{21-1}$$

$$\ln \gamma = 0,577216 \text{ (costante di Eulero)}$$

Nel grafico di figura 1.5 sono riportati gli andamenti delle funzioni Z e delle loro derivate Z'.

Nella tabella 1.1 sono invece riportati i valori numerici delle funzioni Z e loro derivate Z' calcolate per x variabile da 0 a 6. Per valori di x maggiori di 6 può essere usato x tendente a  $\infty$  con una precisione che può arrivare fino alla quinta cifra decimale ed oltre.

$$\begin{matrix} Z_1(x), & Z_2(x), & \frac{dZ_1(x)}{dx}, & \frac{dZ_2(x)}{dx}, \\ Z_3(x), & Z_4(x), & \frac{dZ_3(x)}{dx}, & \frac{dZ_4(x)}{dx}. \end{matrix}$$

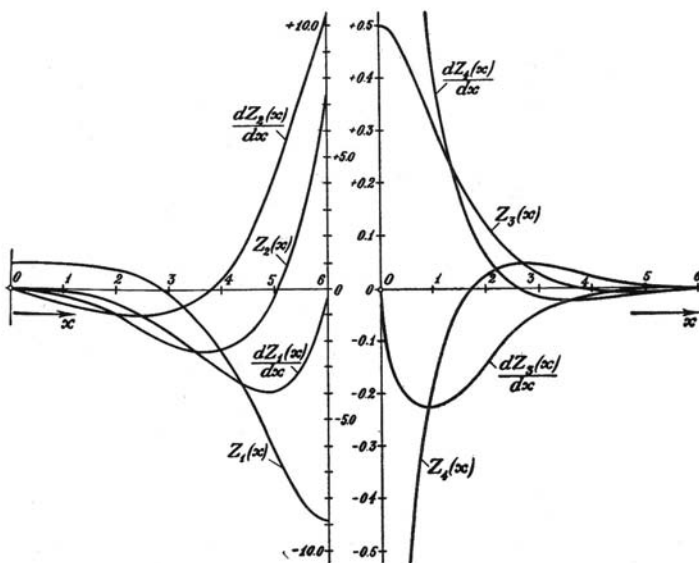


Figura 1.5  
Andamenti  
delle funzioni Z e Z'

Fra le funzioni Z e le loro derivate Z' esistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_1}{dx^2} &= Z_2 - \frac{1}{x} \cdot \frac{dZ_1}{dx} \\ \frac{d^2 Z_2}{dx^2} &= -Z_1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{dZ_2}{dx} \\ \frac{d^2 Z_3}{dx^2} &= Z_4 - \frac{1}{x} \cdot \frac{dZ_3}{dx} \\ \frac{d^2 Z_4}{dx^2} &= -Z_3 - \frac{1}{x} \cdot \frac{dZ_4}{dx} \end{aligned} \tag{22-1}$$

Si esamina il caso di carico concentrato N al centro O della piastra (figura 1.6) considerata di grandi dimensioni.

Le quattro costanti di integrazione della (19-1) si possono trovare dalle condizioni al contorno con alcune semplici osservazioni.

L'inflessione  $w(x)$  deve essere trascurabile anche per  $x$  tendente a  $\infty$  per cui  $c_1 = c_2 = 0$ .

Inoltre nel punto O per evidenti motivi geometrici di continuità e simmetria  $dw/dr$  deve annullarsi e quindi, visto l'andamento di  $Z_4$ , deve essere anche  $c_4 = 0$ .

Tabella 1.1. I valori numerici delle funzioni Z e Z' (Hetenyi)

$x$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$
0.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.01	1.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0050
0.02	1.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0100
0.03	1.0000	-0.0002	-0.0000	-0.0150
0.04	1.0000	-0.0004	-0.0000	-0.0200
0.05	1.0000	-0.0006	-0.0000	-0.0250
0.06	1.0000	-0.0009	-0.0000	-0.0300
0.07	1.0000	-0.0012	-0.0000	-0.0350
0.08	1.0000	-0.0016	-0.0000	-0.0400
0.09	1.0000	-0.0020	-0.0000	-0.0450
0.10	1.0000	-0.0025	-0.0001	-0.0500
0.11	1.0000	-0.0030	-0.0001	-0.0550
0.12	1.0000	-0.0036	-0.0001	-0.0600
0.13	1.0000	-0.0042	-0.0001	-0.0650
0.14	1.0000	-0.0049	-0.0002	-0.0700
0.15	1.0000	-0.0056	-0.0002	-0.0750
0.16	1.0000	-0.0064	-0.0003	-0.0800
0.17	1.0000	-0.0072	-0.0003	-0.0850
0.18	1.0000	-0.0081	-0.0004	-0.0900
0.19	1.0000	-0.0090	-0.0004	-0.0950
0.20	1.0000	-0.0100	-0.0005	-0.1000
0.21	1.0000	-0.0110	-0.0006	-0.1050
0.22	1.0000	-0.0121	-0.0007	-0.1100
0.23	1.0000	-0.0132	-0.0008	-0.1150
0.24	0.9999	-0.0144	-0.0009	-0.1200
0.25	0.9999	-0.0156	-0.0010	-0.1250
0.26	0.9999	-0.0169	-0.0011	-0.1300
0.27	0.9999	-0.0182	-0.0012	-0.1350
0.28	0.9999	-0.0196	-0.0014	-0.1400
0.29	0.9999	-0.0210	-0.0015	-0.1450
0.30	0.9999	-0.0225	-0.0017	-0.1500
0.31	0.9999	-0.0240	-0.0019	-0.1550
0.32	0.9998	-0.0256	-0.0020	-0.1600
0.33	0.9998	-0.0272	-0.0022	-0.1650
0.34	0.9998	-0.0289	-0.0025	-0.1700
0.35	0.9998	-0.0306	-0.0027	-0.1750
0.36	0.9997	-0.0324	-0.0029	-0.1800
0.37	0.9997	-0.0342	-0.0032	-0.1850
0.38	0.9997	-0.0361	-0.0034	-0.1900
0.39	0.9996	-0.0380	-0.0037	-0.1950

segue

continua tabella 1.1

$x$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$\frac{dZ_3(x)}{dx}$	$\frac{dZ_4(x)}{dx}$
0.00	0.5000	$-\infty$	0.0000	$+\infty$
0.01	0.4999	-3.0056	-0.0166	63.6595
0.02	0.4997	-2.5643	-0.0288	31.8260
0.03	0.4993	-2.3063	-0.0394	21.2132
0.04	0.4989	-2.1232	-0.0488	15.9055
0.05	0.4984	-1.9813	-0.0575	12.7199
0.06	0.4978	-1.8653	-0.0655	10.5954
0.07	0.4971	-1.7674	-0.0730	9.0771
0.08	0.4963	-1.6825	-0.0800	7.9378
0.09	0.4955	-1.6078	-0.0866	7.0512
0.10	0.4946	-1.5409	-0.0929	6.3413
0.11	0.4936	-1.4805	-0.0989	5.7601
0.12	0.4926	-1.4254	-0.1046	5.2754
0.13	0.4915	-1.3748	-0.1100	4.8648
0.14	0.4904	-1.3279	-0.1152	4.5126
0.15	0.4892	-1.2843	-0.1201	4.2071
0.16	0.4880	-1.2436	-0.1248	3.9394
0.17	0.4867	-1.2054	-0.1294	3.7029
0.18	0.4854	-1.1695	-0.1337	3.4925
0.19	0.4840	-1.1355	-0.1379	3.3040
0.20	0.4826	-1.1034	-0.1419	3.1340
0.21	0.4812	-1.0728	-0.1458	2.9801
0.22	0.4797	-1.0437	-0.1495	2.8400
0.23	0.4782	-1.0160	-0.1531	2.7118
0.24	0.4767	-0.9894	-0.1565	2.5941
0.25	0.4751	-0.9640	-0.1598	2.4857
0.26	0.4735	-0.9397	-0.1630	2.3854
0.27	0.4718	-0.9163	-0.1661	2.2924
0.28	0.4701	-0.8938	-0.1690	2.2060
0.29	0.4684	-0.8722	-0.1719	2.1253
0.30	0.4667	-0.8513	-0.1746	2.0498
0.31	0.4650	-0.8312	-0.1773	1.9791
0.32	0.4632	-0.8117	-0.1798	1.9127
0.33	0.4614	-0.7929	-0.1823	1.8502
0.34	0.4595	-0.7747	-0.1846	1.7912
0.35	0.4577	-0.7571	-0.1869	1.7355
0.36	0.4558	-0.7400	-0.1891	1.6828
0.37	0.4539	-0.7234	-0.1912	1.6329
0.38	0.4520	-0.7073	-0.1932	1.5854
0.39	0.4500	-0.6917	-0.1952	1.5403

segue

continua tabella 1.1

$x$	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$\frac{dZ_1(x)}{dx}$	$\frac{dZ_2(x)}{dx}$
0.40	0.9996	-0.0400	-0.0040	-0.2000
0.41	0.9996	-0.0420	-0.0043	-0.2050
0.42	0.9995	-0.0441	-0.0046	-0.2100
0.43	0.9995	-0.0462	-0.0050	-0.2150
0.44	0.9994	-0.0484	-0.0053	-0.2200
0.45	0.9994	-0.0506	-0.0057	-0.2250
0.46	0.9993	-0.0529	-0.0061	-0.2299
0.47	0.9992	-0.0552	-0.0065	-0.2349
0.48	0.9992	-0.0576	-0.0069	-0.2399
0.49	0.9991	-0.0600	-0.0074	-0.2449
0.50	0.9990	-0.0625	-0.0078	-0.2499
0.51	0.9989	-0.0650	-0.0083	-0.2549
0.52	0.9989	-0.0676	-0.0088	-0.2599
0.53	0.9988	-0.0702	-0.0093	-0.2649
0.54	0.9987	-0.0729	-0.0098	-0.2699
0.55	0.9986	-0.0756	-0.0104	-0.2749
0.56	0.9985	-0.0784	-0.0110	-0.2799
0.57	0.9984	-0.0812	-0.0116	-0.2848
0.58	0.9982	-0.0841	-0.0122	-0.2898
0.59	0.9981	-0.0870	-0.0128	-0.2948
0.60	0.9980	-0.0900	-0.0135	-0.2998
0.61	0.9978	-0.0930	-0.0142	-0.3048
0.62	0.9977	-0.0961	-0.0149	-0.3098
0.63	0.9975	-0.0992	-0.0156	-0.3147
0.64	0.9974	-0.1024	-0.0164	-0.3197
0.65	0.9972	-0.1056	-0.0172	-0.3247
0.66	0.9970	-0.1089	-0.0180	-0.3297
0.67	0.9969	-0.1122	-0.0188	-0.3346
0.68	0.9967	-0.1156	-0.0196	-0.3396
0.69	0.9965	-0.1190	-0.0205	-0.3446
0.70	0.9962	-0.1224	-0.0214	-0.3496
0.71	0.9960	-0.1260	-0.0224	-0.3545
0.72	0.9958	-0.1295	-0.0233	-0.3595
0.73	0.9956	-0.1332	-0.0243	-0.3645
0.74	0.9953	-0.1368	-0.0253	-0.3694
0.75	0.9951	-0.1405	-0.0264	-0.3744
0.76	0.9948	-0.1443	-0.0274	-0.3793
0.77	0.9945	-0.1481	-0.0285	-0.3843
0.78	0.9942	-0.1520	-0.0296	-0.3892
0.79	0.9939	-0.1559	-0.0308	-0.3942

segue