Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

GIOVANNI TRIGILI

Introduzione alla dinamica delle strutture e spettri di progetto

DARIO FLACCOVIO EDITORE

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

Giovanni Trigili
INTRODUZIONE ALLA DINAMICA DELLE STRUTTURE E SPETTRI DI PROGETTO
ISBN 978-88-7758-922-4

© 2010 by Dario Flaccovio Editore s.r.l. – tel. 0916700686 – fax 091525738
www.darioflaccovio.it *info@darioflaccovio.it*

Prima edizione: febbraio 2010

Trigili, Giovanni <1973->

Introduzione alla dinamica delle strutture e spettri di progetto / Giovanni Trigili -
Palermo : D. Flaccovio, 2010.
ISBN 978-88-7758-922-4.
1. Edifici – Progettazione – Zone sismiche.
624.1762 CDD-21 SBN Pal0221821

CIP - Biblioteca centrale della Regione siciliana "Alberto Bombace"

Stampa: Tipografia Priulla, febbraio 2010

Nomi e marchi citati sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.
L'editore dichiara la propria disponibilità ad adempiere agli obblighi di legge nei confronti degli aventi diritto sulle opere riprodotte.
Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata dagli aventi diritto/dall'editore.

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

INDICE

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

3. Analisi della risposta del dominio delle frequenze

4. Risposte al sisma e spettri di progetto

Appendice A – Metodi numerici (metodo delle differenze centrali)

Appendice B – Discretizzazione dei sistemi continui e analisi modale

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

Prefazione

Il presente volume nasce con l'intento di fornire alcune nozioni relative agli spettri di progetto, la cui comprensione è essenziale nella progettazione in campo dinamico. Per descrivere in modo chiaro gli spettri di progetto, si è ritenuto necessario introdurre gli spettri di risposta e gli aspetti essenziali della dinamica delle strutture, la cui conoscenza è fondamentale per tutti quei lettori che non hanno avuto modo di seguire un corso di dinamica durante i loro studi universitari.

Pur non configurandosi come una trattazione puramente nozionistica, chi non si è mai addentrato in questo campo faticherà a comprendere alcuni passaggi. Alcune semplici dimostrazioni aiuteranno tuttavia a fissare e a comprendere meglio alcuni concetti richiamati dalle normative spesso in modo criptico e quasi incomprensibile. Chi, invece, conosce già gli argomenti trattati, potrà trovare in questo testo uno strumento utile anche solo per richiamare alla memoria alcune nozioni.

Il testo è suddiviso in quattro capitoli, i quali analizzano rispettivamente i seguenti argomenti:

– vibrazioni libere;
– forzanti armoniche;
– analisi della risposta nel dominio delle frequenze;
– risposte al sisma e spettri di progetto.

La trattazione è corredata da tre appendici sussidiarie:

– appendice A, nella quale si analizzano i metodi numerici e in particolar modo il metodo delle differenze centrali;
– appendice B, nella quale si esaminano la discretizzazione dei sistemi continui e l'analisi modale;
– appendice C, nella quale sono contenute le istruzioni relative al programma allegato.

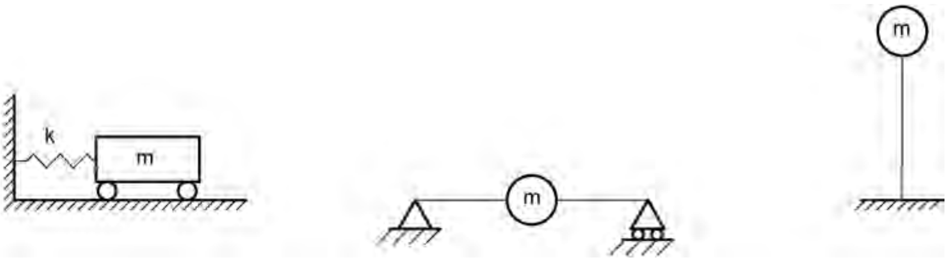
Giovanni Trigili

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

1. VIBRAZIONI LIBERE

1.1. Sistema a un grado di libertà

I sistemi a un grado di libertà (o SDOF, *single degree of freedom*) sono strutture semplici che possono essere ricondotte a sistemi costituiti da una massa concentrata in un punto e da una molla priva di massa (figura 1.1).



a) b) c)

Figura 1.1. Sistemi a un grado di libertà

Nel caso (a) della figura 1.1 la massa m del carrello è connessa a una molla caratterizzata da una costante k, il caso (c) si può ricondurre al caso (a), se si opera in piccoli spostamenti[1], sostituendo all'asta una molla di rigidezza k

[1] Se X è il vettore che individua la posizione di un punto di un sistema continuo e x quello che individua la sua posizione dopo che è avvenuta una deformazione del sistema continuo, lo spostamento è dato da $u(X) = x(X) - X$. Si parla di piccoli spostamenti quando, definita una lunghezza significativa della geometria del sistema continuo L, la norma del vettore $u(X)$ è molto più piccola di tale lunghezza:

$$\frac{\|u(X)\|}{L} << 1$$

In base a questa ipotesi è possibile confondere la configurazione deformata con quella indeformata. Questa ipotesi permette di trascurare, negli sviluppi in serie delle varie funzioni, i termini non lineari.

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

(pari alla forza necessaria per imprimere uno spostamento unitario), allo stesso modo il caso (b) si può si può ricondurre a un sistema equivalente, come quello indicato in figura 1.2.

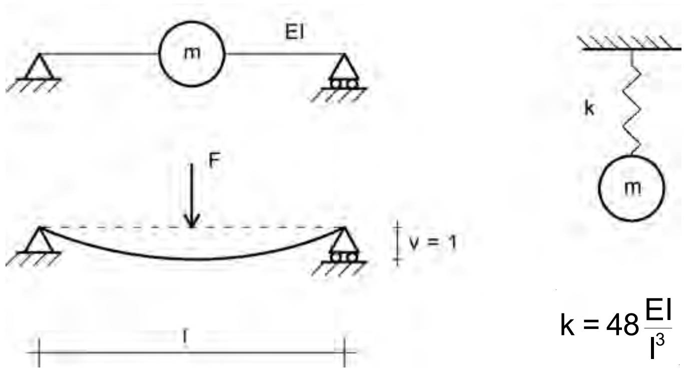


Figura 1.2
Riduzione ad un sistemi a un grado di libertà

In questo caso la forza necessaria per ottenere uno spostamento verticale unitario è pari a:

$$k = 48\frac{EI}{l^3}$$

1.2. CAUSE PERTURBATRICI

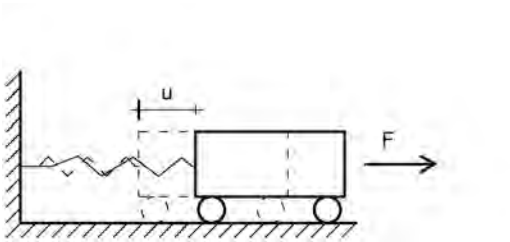
Un sistema esce dal suo stato di quiete, o dalla sua configurazione di equilibrio, per cause perturbatrici quali forze dipendenti dal tempo (dette *forzanti*), spostamenti iniziali, o ancora velocità iniziali date mediante un impulso (per esempio, una martellata).
La risposta del sistema a tali cause perturbatrici è costituita da vibrazioni o oscillazioni rispetto alla sua configurazione di equilibrio iniziale. Per analizzare questo fenomeno, rispetto ai problemi statici, è necessario considerare la variabile tempo.

1.2.1. Differenza tra statica e dinamica: variabile tempo

Riprendendo il caso del carrello di massa *m* legato alla molla caratterizzata da una costante *k,* supponendo il piano di appoggio privo d'attrito, si considerino il caso dell'equilibrio statico e il caso dell'equilibrio dinamico. In

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

entrambi i casi la forza peso mg è equilibrata dalla reazione del piano e non sarà considerata. Inoltre non insorgono forze d'attrito dovute al peso perché si è supposto il piano privo di attrito.



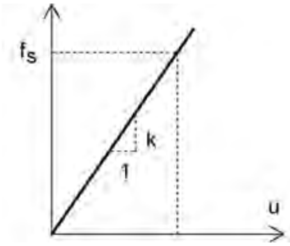


Figura 1.3. Equilibrio in condizioni statiche

1.2.1.1. Equilibrio nel caso statico

Supponendo di applicare una forza F in modo quasistatico, cioè in modo molto lento, si avrà uno spostamento u al quale corrisponde una reazione della molla f_s (il pedice s, dall'inglese *spring*, sta per molla) pari a $k \cdot u$ (figura 1.3). L'equazione di equilibrio è la seguente:

$$F = ku$$

1.2.1.2. Equilibrio nel caso dinamico

Nel caso dell'equilibrio dinamico la forza F varia nel tempo con una certa legge $P(t)$ e, oltre alla reazione della molla $f_s = ku(t)$, anch'essa dipendente dal tempo per via di $u(t)$, nasce la *forza d'inerzia* f_I, pari, in base alla seconda legge della dinamica, a $m\ddot{u}(t)$ e opposta all' accelerazione. L'equazione di equilibrio è quindi:

$$ku + m\ddot{u}(t) = P(t)$$

Rispetto al caso statico, oltre alla variabile tempo, entra in gioco pure la massa attraverso la forza d'inerzia.

1.3. Equazione di equilibrio dinamico

In generale l'equilibrio di un generico sistema si può esprimere mediante la seguente equazione:

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t)$$

dove

$f_I(t)$ = forza d'inerzia pari a $m\ddot{u}(t)$
$f_D(t)$ = forza dissipativa (D sta per *damping* = smorzamento)
$f_S(t)$ = forza elastica (S sta per *spring* = molla).

Si aggiunge un'altra forza, la forza dissipativa, che modella gli effetti dissipativi presenti nei sistemi reali. Per questa azione viene generalmente considerata la seguente relazione (figura 1.4):

$$f_D = c \cdot \dot{u}(t)$$

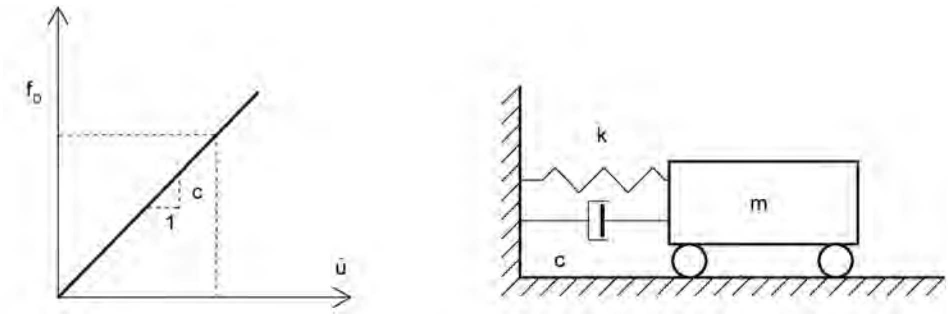


Figura 1.4. La forza dissipativa: modello viscoso

Figura 1.5
L'equilibrio dinamico

Il legame è analogo a quello della forza elastica della molla, ma riferita alla velocità anziché allo spostamento[2]. La grandezza c è una costante detta *di*

[2] Questa forza può essere sperimentata facilmente mettendo una mano fuori da un mezzo in movimento e la sperimenta il nuotatore nella sua bracciata. Si può notare facilmente come tale azione sia proporzionale alla velocità del mezzo o della bracciata.

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

smorzamento e, per la forza dissipativa, si parla in questo caso di *modello viscoso*. Lo smorzatore viene indicato con il simbolo di un piccolo pistone.
Nel caso generale, quindi, sostituendo nell'equazione generale di equilibrio dinamico le diverse grandezze si ottiene:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=P(t)$$

Si tratta di un'equazione differenziale del 2° ordine, non omogenea, se $P(t)$ è non nulla, e a coefficienti costanti (m, c e k), in cui

$\dot{u}(t)=\dfrac{du}{dt}$ = derivata nel tempo dello spostamento

$\ddot{u}=\dfrac{d\dot{u}}{dt}$ = derivata nel tempo della velocità

$u(t)$ = risposta del sistema.

Poiché l'equazione differenziale è del 2° ordine la $u(t)$ dipenderà da due costanti arbitrarie, le quali potranno definirsi risolvendo il problema mediante le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(0)=u_0 \\ \dot{u}(0)=\dot{u}_0 \end{cases}$$

Se $P(t)$ = 0, l'equazione è omogenea e in questo caso si parla di *vibrazioni libere*, ossia senza nessuna forzante (in questo caso le oscillazioni della massa sono dovute a un spostamento u_0 o a una velocità $\dot{u}_0$ iniziali).

1.4. Vibrazioni libere non smorzate

L'equazione del moto è la seguente:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

Si tratta di un'equazione differenziale lineare, omogenea, del 2° ordine, la cui soluzione si può ricercare nella forma seguente:

$$u(t) = \bar{u} \cdot e^{\lambda t}$$

Derivando si ha:

$$\dot{u}(t) = \bar{u} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

e

$$\ddot{u}(t) = \bar{u} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$$

che sostituite nell'equazione differenziale forniscono

$$m\bar{u}\lambda^2 e^{\lambda t} + k\bar{u}e^{\lambda t} = 0$$

e

$$\left[m\lambda^2 + k\right] \cdot \bar{u}e^{\lambda t} = 0$$

Non considerando la soluzione banale $\bar{u} = 0$ (nessuno spostamento del sistema), la soluzione è da ricercare imponendo:

$$m\lambda^2 + k = 0$$

Quest'ultima è detta *equazione caratteristica* e da essa si ottengono due valori[3] di λ:

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

[3] In essi si fa riferimento all'*unita immaginaria i*, che gode della seguente proprietà nel campo dei numeri complessi:

$$i^2 = -1$$

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

o anche

$$\lambda = \pm\, i\omega_n$$

avendo posto

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le due soluzioni sono allora:

$$u_1(t) = \bar{u}e^{i\omega_n t}$$

$$u_2(t) = \bar{u}e^{-i\omega_n t}$$

e la soluzione generale è una combinazione lineare di esse:

$$u(t) = Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t} \tag{1.1}$$

nella quale la costante $\bar{u}$ è inglobata nelle costanti *A* e *B* d'integrazione. L'equazione (1.1) si preferisce scriverla in forma diversa utilizzando le formule di Eulero:

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

quindi

$$u(t) = A[\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t] + B[\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t]$$

$$u(t) = (A + B)\cos\omega_n t + i(A - B)\sin\omega_n t$$

$$u(t) = c_1\cos\omega_n t + c_2\sin\omega_n t \tag{1.2}$$

Avendo posto $c_1 = A + B$ e $c_2 = i(A - B)$, c_1 e c_2 possono anche risultare valo-

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

ri nel campo complesso e si determinano dalle condizioni iniziali (t = 0). La soluzione generale è allora la (1.2).
Nel caso di spostamento iniziale imposto, le condizioni iniziali sono $u(t=0)=u_0$ e $\dot{u}(t=0)=0$:

$$\begin{cases} u(0) = c_1 \cos\omega_n\phi + c_2 \sin\omega_n\phi = u_0 \\ \dot{u}(0) = c_1\omega_n \sin\omega_n\phi + c_2\omega_n \cos\omega_n\phi = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1 = u_0 \\ c_2\omega_n = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$c_1 = u_0 \quad \text{e} \quad c_2 = 0$$

La soluzione è infine (figura 1.6):

$$u(t) = u_0 \cos\omega_n t$$

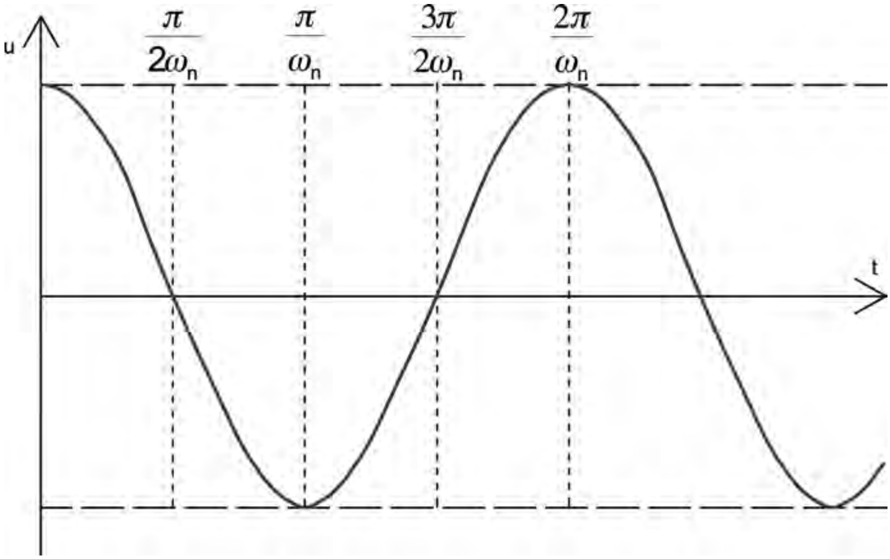


Figura 1.6. Vibrazioni libere con spostamento iniziale imposto

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

La funzione si ripete periodicamente, con periodo pari a:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Tale valore è detto *periodo naturale* del sistema e si configura come un intervallo di tempo naturale, ossia dipendente da fattori caratteristici del sistema quali la massa m e la rigidezza k. Il suo inverso è detto *frequenza ciclica* del sistema[4]:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{T_n}$$

mentre il valore di ω_n è detto *frequenza naturale* del sistema[5].

1.5. Risposta in presenza di una velocità iniziale

Nel caso in cui le condizioni iniziali includano pure una velocità iniziale, la soluzione diventa la seguente:

$$\begin{cases} u(t) = c_1 \cos\omega_n t + c_2 \sin\omega_n t \\ \dot{u}(t) = c_1\omega_n \sin\omega_n t + c_2\omega_n \cos\omega_n t \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

[4] La rigidezza k di un sistema si può trovare sperimentalmente in due modi:
- caso statico: imponendo uno spostamento u al carrello della figura 1.3, si misura quindi la forza corrispondente applicata F, che sarà pari a $k \phi u$, da cui ne segue il valore di k;
- caso dinamico: mettendo in vibrazione il sistema si misura il periodo T, dal quale si risale a ω_n, e, essendo nota la massa, a k.

[5] Alcuni autori definiscono f_n *frequenza circolare*, anziché *frequenza naturale*.

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

ossia

$$\begin{cases} u(0) = c_1 = u_0 \\ \dot{u}(0) = c_2\omega_n = \dot{u}_0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$c_1 = u_0$$

$$c_2 = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}$$

per cui la soluzione è ora pari a

$$u(t) = u_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{1.3}$$

La funzione $u(t)$ è ora somma di due armoniche alla stessa frequenza, quindi anche la somma si ripeterà con uguale frequenza. Si può dimostrare infatti che la (1.3) si può porre nella seguente forma:

$$u(t) = \rho\cos(\omega_n t - \varphi) \tag{1.4}$$

con

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)}$$

e

$$\tan\varphi = \frac{\dot{u}_0/\omega_n}{u_0}$$

ossia ancora un'armonica alla stessa frequenza del caso con il solo sposta-

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

mento iniziale imposto, ma con un ritardo φ (il massimo in questo caso si avrà dopo un tempo). Il moto rappresentato dalla funzione $u(t)$ è detto *moto armonico semplice*.

1.5.1. Rappresentazione della soluzione nel piano complesso

La soluzione (1.3) si può rappresentare mediante il piano complesso (o di Argand-Gauss) con l'asse x relativo ai numeri reali e l'asse y relativo ai numeri immaginari (figura 1.7)

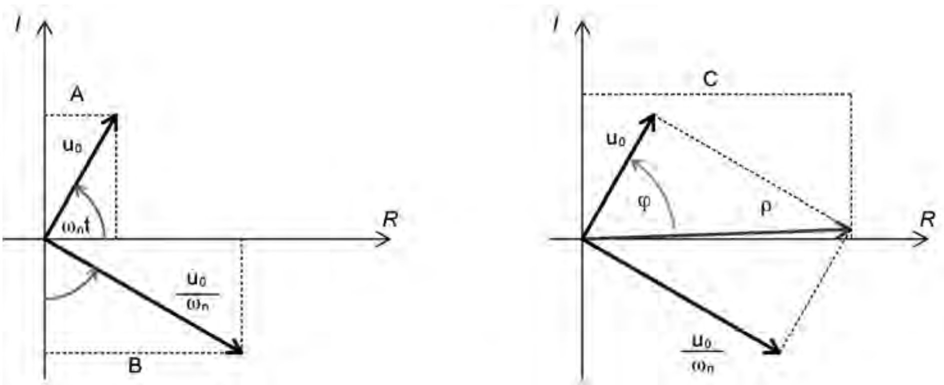


Figura 1.7. Rappresentazione della risposta nel piano di Argand-Gauss

In tale piano si consideri un vettore di modulo u_0 in rotazione attorno all'origine con velocità angolare f_n. Al generico istante t, l'angolo di rotazione è $f_n t$. La sua componente reale (sull'asse reale) A è pari a $u_0 \cos\omega_n t$. Si può associare così un vettore alla funzione $\cos\omega_n t$. In modo analogo è possibile definire un altro vettore tale che la sua componente reale sia associabile al $\sin\omega_n t$. Considerando infatti un secondo vettore $\dot{u}_0 / \omega_n$, che, istante per istante, si mantiene perpendicolare al primo (e quindi ruota con la stessa velocità), esso avrà componente reale B pari a:

$$\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$$

Operando in questo modo, il vettore somma dei due precedenti, di modulo τ, ha per componenti la somma delle componenti dei due vettori. La componen-

Abstract tratto da www.darioflaccovio.it - Tutti i diritti riservati

te reale di questo vettore è pari proprio alla soluzione dell'equazione (1.3), cioè:

$$\rho(\Re) = u(t) = u_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \sin\omega_n t$$

È chiaro pure che τ, come vettore somma, ruota alla stessa velocità degli altri due vettori, quindi la somma di due armoniche di stessa frequenza è ancora un'armonica di pari frequenza. Il vettore somma però si troverà in ritardo rispetto al vettore u_0 di un angolo φ.
È immediato constatare che:

$$\rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)}$$

e

$$\tan\varphi = \frac{\dot{u}_0 / \omega_n}{u_0}$$

Quindi è lecito scrivere la $u(t)$ come la (1.4).

1.6. TIPI DI NON LINEARITÀ

Prima di passare al caso in cui sono presenti delle dissipazioni, è necessario ricordare le due ipotesi in base alle quali si sta operando, cioè i piccoli spostamenti e il legame elastico lineare per la molla. In assenza di una di queste due ipotesi si perde la linearità del sistema. Si possono avere allora due tipi di non linearità:

– non-linearità costitutiva, dovuta al legame costitutivo della molla, in generale: $f_S = f_S(u, \dot{u})$;
– non-linearità geometrica, quando si opera in grandi spostamenti.

In questi casi non è possibile ottenere una soluzione in forma chiusa. È quindi necessario ricorrere ai metodi numerici. Di seguito si considererà il caso in cui viene a mancare l'ipotesi dei piccoli spostamenti, cioè il caso relativo alla non-linearità geometrica.